Ueber Differentialgleichungen vom Fuchsschen Typus mit einem Parameter und ihre Reduzibilität.

INAUGURAL-DISSERTATION

der

mathematischen und naturwissenschaftlichen Fakultät

der

KAISER-WILHELMS-UNIVERSITÆT STRASSBURG

zur

Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

Heinrich Wacker

aus Strassburg i. E.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

STRASSBURG i. E.
Buchdruckerei C. & J. Gœller, Magdalenengasse 16
1912.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548024_0064

Inhalt.

Seite

Einleitung.

1. Kapitel: Aufstellung der Fuchsschen Differentialgleichungen mit einem willkürlichen Parameter und Ausübung der fundamentalen Transformationen . . . . .

1. Abschnitt: Gestalt der Fuchsschen Differentialgleichungen und Auftreten von Parametern . . . . . .

§ 1. Anzahl der willkürlichen Parameter einer Fuchsschen Gleichung 1

§ 2. Form der Fuchsschen Differentialgleichungen mit einem willkürlichen Parameter . . . . . .

A. Differentialgleichung 2. Ordnung 7

B. „ 3. „ 10

2. Abschnitt: Ausübung der fundamentalen Transformationen 15

§ 1. Lineare Transformation der unabhängigen Veränderlichen . . 16

A. Differentialgleichung 2. Ordnung 19

B. „ 3. „ 22

§ 2. Transformation der abhängigen Veränderlichen . . . . .

A. Differentialgleichung 2. Ordnung 25

B. „ 3. „ 31

2. Kapitel: Untersuchung der Reduzibilität . . . . . .

1. Abschnitt: Allgemeine Betrachtungen über Reduzibilität . . . . . .

§ 1. Zerlegung von Differentialausdrücken in Differentialfaktoren . 39

§ 2. Reduzibilität von Fuchsschen Differentialgleichungen . . . 41

§ 3. Verallgemeinerung eines Satzes von Frobenius 45

2. Abschnitt: Reduzibilität von Differentialgleichungen 2. Ordnung vom Fuchsschen Typus . . . . . .
§ 1. Zerlegung von Fuchsschen Differentialausdrücken 2. Ordnung . 48
§ 2. Die im engeren Sinne reduziblen Fuchsschen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit einem beliebigen Parameter 50
a) Die Gleichung A $(y) = 0$ 52
b) Die Gleichung B $(y) = 0$ 57
§ 3. Die Reduzibilität der Gausschen Differentialgleichung . . . 60
§ 4. Allgemeine Sätze über die Reduzibilität von Differentialgleichungen 2. Ordnung und über die Anzahl der zugehörigen reduzierten Gleichungen 1. Ordnung 62
3. Abschnitt: Reduzibilität von Fuchsschen Differentialgleichungen 3. Ordnung
§ 1. Zerlegung des Fuchsschen Differentialausdrucks 3. Ordnung mit einem Parameter 66
§ 2. Die im engeren Sinne reduziblen Fuchsschen Gleichungen 3. Ordnung mit einem Parameter . . . . . .
a) Reduktion auf eine Differentialgleichung 1. Ordnung. . 67
b) Reduktion auf eine Differentialgleichung 2. Ordnung. . 73
c) Zerlegung des Differentialausdrucks 3. Ordnung in drei Differentialfaktoren 1. Ordnung 82
§ 3. Allgemeine Sätze über die Reduzibilität von Differentialgleichungen 3. Ordnung 87
Anhang: Beispiele von reduziblen Fuchsschen Differentialgleichungen mit einem Parameter 91

Einleitung.

L. Fuchs hat in seiner grundlegenden Arbeit: „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten“ *) den nach ihm benannten Typus von linearen homogenen Differentialgleichungen aufgestellt, deren Integrale an den in endlicher Zahl vorhandenen singulären Stellen e_i, mit einer endlichen Potenz von $(x - e_i)$ multipliziert, endlich bleiben. Werden für eine solche Differentialgleichung nur die Stellen e_i und die Exponenten der Fundamentalsysteme von Integralen vorgeschrieben, so enthalten die Koeffizienten noch eine bestimmte Anzahl willkürlicher Grössen, die sogenannten accessorischen Parameter.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit den Differentialgleichungen vom Fuchsschen Typus, in deren Koeffizienten nur *ein accessorischer Parameter* auftritt.

Im ersten Kapitel wird nach Aufstellung der Normalformen der in Betracht kommenden Differentialgleichungen zweiter und dritter Ordnung der Einfluss gewisser fundamentaler Transformationen auf den willkürlichen Parameter untersucht.

Im zweiten Kapitel wird dann die Frage der *Reduzibilität* der vorgelegten Differentialgleichungen behandelt. Als Untersuchungsmethode benützen wir die Zerlegung von Differentialausdrücken in symbolische Differentialfaktoren. Zur Aufstellung einer Reihe von allgemein gültigen Sätzen schliessen wir uns an Arbeiten der Herren Frobenius **), Beke ***) und Loewy ****) an.

Die Ermittlung der Reduzibilität wird rechnerisch durchgeführt für eine bestimmte *Gattung von Differentialgleichungen, für welche die zugehörigen reduzierten Differentialgleichungen keine neuen singulären Stellen aufweisen.*

*) Jahresbericht über die städtische Gewerbeschule zu Berlin, Ostern 1865. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 66 (1866). Gesammelte mathematische Werke, herausgegeben von R. Fuchs und L. Schlesinger, Bd. I (1904).

**) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 76 (1873), S. 236.

***) Mathematische Annalen, Bd. 45 (1894), S. 278.

****) Mathematische Annalen, Bd. 56 (1903), S. 549; Bd. 62 (1906), S. 89.

1. KAPITEL.

Aufstellung der Fuchsschen Differentialgleichungen mit einem willkürlichen Parameter und Ausübung der fundamentalen Transformationen.

1. Abschnitt.

Gestalt der Fuchsschen Differentialgleichungen und Auftreten von Parametern.

§ 1.

Anzahl der willkürlichen Parameter einer Fuchsschen Gleichung.

Aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen ist bekannt, dass eine Differentialgleichung n. Ordnung, welche dem Fuchsschen Typus angehört, die Form hat:

$$(1) \quad \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{f_1(x)}{f(x)} \cdot \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots\cdots + \frac{f_{n-1}(x)}{f(x)^{n-1}} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{f_n(x)}{f(x)^n} \cdot y = 0,$$

wo $f_\alpha(x)$ eine ganze rationale Funktion vom Grade $\leq \alpha(k-1)$ bedeutet, und wo

$$(2) \quad f(x) = (x - e_1)(x - e_2) \cdots\cdots (x - e_k)$$

eine ganze rationale Funktion k. Grades ist.

Die singulären Stellen der Differentialgleichung werden dann gebildet von den im Endlichen liegenden Nullpunkten e_i $(i = 1,2 \ldots k)$ von $f(x)$ und (im allgemeinen) dem unendlich fernen Punkte. Ist $x = \infty$ regulär, so ist die Funktion $f_n(x)$ höchstens vom Grade $n(k-2)$.

Wir setzen im folgenden stets die Verzweigungsexponenten r_{ij} der zu den singulären Punkten gehörigen Fundamentalsysteme von Integralen als gegeben voraus. Dann lauten die entsprechenden determinierenden Fundamentalgleichungen

$$F_i(r) \equiv r^n + a_{i1} r^{n-1} + \ldots\ldots + a_{in} = 0, \quad (i = 1, 2. \ldots\ldots s) \tag{3}$$

wo

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij} = -a_{i1}, \quad \sum_{1,2\ldots n}^{j<l} r_{ij}\, r_{il} = a_{i2}, \ldots\ldots, r_{i1}\, r_{i2}\, r_{i3} \ldots\ldots r_{in} = \pm a_{in}$$

gesetzt sind. Die r_{ij} müssen dabei die Fuchssche Relation erfüllen

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{n} r_{ij} = \frac{(s-2)\, n\, (n-1)}{2}. \tag{4}$$

Hierin bedeutet s den Wert k oder $(k+1)$, je nachdem der Punkt $x = \infty$ regulär oder singulär ist.

Schreiben wir die Fundamentalgleichungen der singulären Stellen e_i in der zweiten Form

$$r(r-1)(r-2)\ldots.(r-n+1) + r(r-1)\ldots.(r-n+2)\frac{f_1(e_i)}{f'(e_i)} + \ldots. \\ \ldots\ldots + r\frac{f_{n-1}(e_i)}{f'(e_i)^{n-1}} + \frac{f_n(e_i)}{f'(e_i)^n} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots.. k), \tag{3'}$$

so gelten die Beziehungen

$$a_{i1} = \frac{f_1(e_i)}{f'(e_i)} - \frac{n(n-1)}{2}, \ldots\ldots\ldots, a_{in} = \frac{f_n(e_i)}{f'(e_i{}^n)}.$$

Durch Zerlegung der Koeffizienten von (1) ergibt sich jeweils ausser einer Summe von Partialbrüchen noch eine ganze Funktion. Während die Zähler der

Brüche und ein Teil der Konstanten der ganzen Funktionen sich durch die Grössen a_i ausdrücken lassen, bleibt ein anderer Teil der Konstanten beliebig.

Wenn man also für eine Fuchssche Differentialgleichung von bestimmter Ordnung die Lage der singulären Stellen und die Verzweigungsexponenten der zugehörigen Fundamentalsysteme vorschreibt, so enthalten die Koeffizienten noch eine Reihe willkürlicher Grössen. Die *Anzahl dieser accessorischen Parameter* beläuft sich auf *)

$$(5) \qquad w = \frac{n-1}{2}\Big\{n(s-2)-2\Big\}.$$

Stellen wir diejenigen Fälle zusammen, welche ganzzahlige $s \geq 0$, $w \geq 0$ ergeben, so entsteht folgende

Tabelle:

$$(6) \qquad \begin{array}{l|l} n=1 \quad w=0 \quad s \text{ und } k \text{ beliebig} & n=3 \quad w=3s-8 \quad \begin{cases} s=3 & w=1 \\ s=4 & w=4 \\ \cdots\cdots & \end{cases} \\ n=2 \quad w=s-3 \quad \begin{cases} s=3 & w=0 \\ s=4 & w=1 \\ \cdots\cdots & \end{cases} & n=4 \quad w=3(2s-5) \quad \begin{cases} s=3 & w=3 \\ s=4 & w=9 \\ \cdots\cdots & \end{cases} \end{array}$$

u. s. w.

Daraus folgt die bekannte Aussage:

Alle Fuchsschen Differentialgleichungen

a) *1. Ordnung mit beliebig vielen singulären Stellen,*

b) *2. Ordnung mit 3 Unstetigkeitsstellen*

enthalten keinen willkürlichen Parameter.

Nach Formel (5) würde sich für eine beliebige Ordnung $n > 1$ ein *negativer* Wert für w ergeben, sobald $s = 1$ oder $s = 2$ ist. Dann besteht der Satz:

Für die Fuchsschen Differentialgleichungen von beliebiger Ordnung $n > 1$ mit einer oder 2 singulären Stellen dürfen die Verzweigungsexponenten nicht beliebig vorgeschrieben werden; dieselben haben ausser der Fuchsschen Relation, welche für

*) Diese Zahl stimmt für $s = \sigma + 1$ mit der in Schlesinger, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Bd. I, S. 242 angegebenen überein.

$$s = 1 \quad \sum_{j=1}^{n} r_{ij} = \frac{(1-n)\,n}{2}$$

$$s = 2 \quad \sum_{1,2}^{i} \sum_{j=1}^{n} r_{ij} = 0$$

lautet, noch eine gewisse Anzahl $w' = -w$ *weiterer Bedingungen zu erfüllen, wo* w *die Parameteranzahl ist. Es wird für*

$$s = 1 \quad w' = \frac{(n-1)\,(n+2)}{2}$$

$$s = 2 \quad w' = n - 1.$$

Aus diesem Satze folgt sofort:

Für $s = 1$, $n > 1$ ist die Anzahl $(w' + 1)$ der Bedingungsgleichungen grösser als die Zahl der Verzweigungsexponenten. Weil noch für $s = 1$, $n = 1$ wegen der Fuchsschen Relation $r = 0$ $\frac{dy}{dx} = 0$ keine singuläre Stelle aufweist, so sieht man, dass es *keine* Fuchsschen Differentialgleichungen mit nur einer singulären Stelle gibt.

Da obiger Satz nur eine Umdeutung der Zahl w enthält für diejenigen Fälle, in denen dieselbe negativ wird, so ist sein Beweis erbracht, wenn wir durch ein Beispiel die Richtigkeit unserer Auffassung nachweisen.

Wir betrachten hierzu die Differentialgleichung 2. Ordnung mit zwei im Endlichen liegenden singulären Stellen e_1 und e_2. Bezeichnen wir die Verzweigungsexponenten mit λ_1, μ_1 und λ_2, μ_2, so verlangt die Fuchssche Relation

$$\mu_2 = -(\lambda_1 + \mu_1 + \lambda_2). \tag{7}$$

Wir werden zeigen, dass ausserdem zwischen λ_1, μ_1 und λ_2 eine Beziehung bestehen muss, weil $w' = 1$ ist.

Die Differentialgleichung möge die Form haben

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x) \cdot \frac{dy}{dx} + p_2(x) \cdot y = 0. \tag{8}$$

Da die beiden Punkte e_1, e_2 die einzigen singulären Stellen sein sollen, so müssen wir für $x = \infty$ Stetigkeit der Koeffizienten fordern. Hierzu ist nötig *), dass dieselben sich darstellen lassen

$$p_1(x) = \frac{2}{x} - \frac{\alpha_0}{x^2} - \cdots, \quad p_2(x) = \frac{\beta_0}{x^4} + \frac{\beta_1}{x^5} + \cdots, \tag{9}$$

wo die α_i, β_i unbestimmte Grössen sind.

Aus den determinierenden Fundamentalgleichungen

$$F_i(r) \equiv r^2 + \left\{\frac{f_1(e_i)}{f'(e_i)} - 1\right\} r + \frac{f_2(e_i)}{f'(e_i)^2} = 0 \quad , \qquad (i = 1, 2) \tag{10}$$

deren Wurzeln die gegebenen Grössen λ_i, μ_i sind, ergibt sich

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \sum_{1,2}^{i} \frac{f_1(e_i)}{f'(e_i)(x - e_i)} = \frac{1 - \lambda_1 - \mu_1}{x - e_1} + \frac{1 + \lambda_1 + \mu_1}{x - e_2}, \\ p_2(x) &= \frac{1}{(x - e_1)(x - e_2)} \left\{ C + (e_1 - e_2) \left[\frac{\lambda_1 \mu_1}{x - e_1} + \frac{\lambda_2 (\lambda_1 + \mu_1 + \lambda_2)}{x - e_2} \right] \right\}, \end{aligned} \tag{11}$$

wonach wir unter Anwendung der Reihenentwicklung

$$\frac{1}{x - e_i} = \frac{1}{x} + \frac{e_i}{x^2} + \frac{e_i^2}{x^3} + \cdots \tag{12}$$

eine zweite Darstellung finden:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \frac{2}{x} + \cdots, \\ p_2(x) &= \frac{C}{x^2} + \frac{C(e_1 + e_2) + (\lambda_1 + \lambda_2)(\mu_1 + \lambda_2)(e_1 - e_2)}{x^3} + \cdots. \end{aligned} \tag{13}$$

Vergleich der Entwicklungen (9) und (13) liefert, weil e_1 von e_2 verschieden sein soll, die beiden Bedingungen

$$C = 0, \tag{14}$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2)(\mu_1 + \lambda_2) = 0. \tag{15}$$

*) Vgl. § 2.

Während die erste Gleichung das Auftreten eines Parameters ausschliesst, stellt die zweite die gesuchte Relation dar.

Als Normalform der Gleichung 2. Ordnung mit 2 singulären Stellen finden wir somit

$$(8') \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \left\{ \frac{1-\lambda_1-\mu_1}{x-e_1} + \frac{1+\lambda_1+\mu_1}{x-e_2} \right\} \frac{dy}{dx} + \frac{\lambda_1 \mu_1 (e_1-e_2)^2}{(x-e_1)^2 (x-e_2)^2} \cdot y = 0$$

mit den Exponenten

$$\lambda_1 , \mu_1 \quad ; \quad -\lambda_1 , \mu_1 .$$

Von dieser Gleichung lässt sich leicht zeigen *), dass sie stets mit einer Differentialgleichung 1. Ordnung mit denselben singulären Stellen ein Integral gemeinsam hat. Dies muss aber auch der Fall sein nach dem von L. Fuchs bewiesenen Satze **):

Eine Differentialgleichung, deren Koeffizienten innerhalb eines zweifach zusammenhängenden Bereiches eindeutige Funktionen sind, ist stets reduzibel; sie hat mit einer Differentialgleichung 1. Ordnung von derselben Beschaffenheit ein Integral gemeinsam.

Es erweist sich also unser Satz über die Bedeutung eines negativen w in gewissem Sinne als eine veränderte Ausdrucksweise für den eben angeführten Satz.

Nachdem durch diese Sätze alle Differentialgleichungen als erledigt gelten können, welche ausser den singulären Stellen und den zugehörigen Verzweigungsexponenten keine verfügbaren Grössen aufweisen, nehmen wir in der vorliegenden Arbeit hauptsächlich die Behandlung derjenigen Fälle in Angriff, welche einen *einzigen* willkürlichen Parameter liefern.

Dies sind, wie aus der Tabelle (6) zu ersehen ist, die

Differentialgleichungen

a) *2. Ordnung mit 4 singulären Punkten,*

b) *3. Ordnung mit 3 singulären Punkten.*

Die singulären Stellen können entweder alle im Endlichen liegen oder es kann eine von ihnen in den unendlich fernen Punkt fallen.

---

*) vgl. die im 2. Kapitel zu verwendende Methode.

**) Schlesinger, Handbuch I, S. 88 ff.

§ 2.

Form der Fuchsschen Differentialgleichungen mit einem willkürlichen Parameter.

A.

Differentialgleichung 2. Ordnung.

Wir beginnen mit der Aufstellung der Differentialgleichung 2. Ordnung mit vier im Endlichen gelegenen singulären Stellen e_i; wir setzen dieselbe in der Form an:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x) \cdot \frac{dy}{dx} + p_2(x) \cdot y = 0. \tag{1}$$

Da nun der unendlich ferne Punkt nicht zu den singulären Stellen gehören soll, so müssen wir fordern, dass für $x = \infty$ die Koeffizienten stetig sind. Bilden wir die Umgebung von $x = \infty$ auf diejenige von $\xi = 0$ ab vermittels der Substitution:

$$x = \frac{1}{\xi}, \tag{2}$$

so geht die Differentialgleichung (1) über in:

$$\xi^4 \cdot \frac{d^2y}{d\xi^2} + \xi^2 \left\{ 2\xi - p_1\left(\frac{1}{\xi}\right) \right\} \frac{dy}{d\xi} + p_2\left(\frac{1}{\xi}\right) \cdot y = 0. \tag{1'}$$

Damit die Koeffizienten dieser Gleichung (nach Division durch ξ^4) für $\xi = 0$ stetig bleiben, müssen wir ansetzen

$$\begin{aligned} \frac{2\xi - p_1\left(\frac{1}{\xi}\right)}{\xi^2} &= \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \cdots \cdots \\ \frac{p_2\left(\frac{1}{\xi}\right)}{\xi^4} &= \beta_0 + \beta_1 \xi + \beta_2 \xi^2 + \cdots \cdots \end{aligned} \tag{3}$$

Hieraus ergeben sich, wenn wir rückwärts $\xi = \frac{1}{x}$ setzen, für die Koeffizienten die Entwicklungen:

$$p_1(x) = \frac{2}{x} - \frac{\alpha_0}{x^2} - \frac{\alpha_1}{x^3} - \cdots \tag{3'}$$

$$p_2(x) = \frac{\beta_0}{x^4} + \frac{\beta_1}{x^5} + \frac{\beta_2}{x^6} + \cdots$$

mit den unbestimmten Konstanten $\alpha_\lambda, \beta_\lambda$, wonach im Unendlichen $p_1(x)$ zur ersten, $p_2(x)$ zur vierten Ordnung verschwindet; daher muss, wenn wir

$$f(x) = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)(x - e_4)$$

$$p_1(x) = \frac{g(x)}{f(x)}, \quad p_2(x) = \frac{h(x)}{f(x)^2} \tag{4}$$

einführen, $g(x)$ vom dritten, $h(x)$ vom vierten Grad sein.

Die determinierenden Fundamentalgleichungen lauten:

$$r(r-1) + r\frac{g(e_i)}{f'(e_i)} + \frac{h(e_i)}{f'(e_i)^2} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{5}$$

oder

$$F_i(r) \equiv r^2 + u_i r + v_i = 0 \tag{5'}$$

mit den Beziehungen

$$l_i + m_i = -u_i = 1 - \frac{g(e_i)}{f'(e_i)}$$

$$l_i \cdot m_i = v_i = \frac{h(e_i)}{f'(e_i)^2}, \tag{6}$$

wo die Verzweigungsexponenten l_i, m_i der Fuchsschen Beziehung

$$\sum_{i=1}^{4} u_i = -2 \tag{7}$$

unterworfen sind.

Durch Partialbruchzerlegung finden wir:

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} p_1(x) &= \frac{g(x)}{f(x)} = \sum^{i} \frac{g(e_i)}{f'(e_i)(x-e_i)} = \sum^{i} \frac{1+u_i}{x-e_i}, \\ p_2(x) &= \frac{h(x)}{f(x)^2} = \frac{1}{f(x)} \left\{ \sum^{i} \frac{h(e_i)}{f'(e_i)(x-e_i)} + w \right\} \\ &= \frac{1}{f(x)} \left\{ \sum^{i} \frac{v_i f'(e_i)}{x-e_i} + w \right\}. \end{aligned}\right.$$

Wenden wir hierauf die Reihenentwicklung

$$(9)\quad \frac{1}{x-e_i} = \frac{1}{x} + \frac{e_i}{x^2} + \frac{e_i^{\,2}}{x^3} + \cdots\cdots$$

an, so sind die zwei Darstellungen für $p_1(x)$ im 1. Glied identisch; da die Reihe für $p_2(x)$ erst mit der Potenz x^{-4} beginnt, ist *w ein willkürlicher Parameter.*

Wir erhalten also für die Differentialgleichung *2.* Ordnung mit *vier im Endlichen gelegenen Verzweigungsstellen die Normalform* *):

$$(A)\quad \frac{d^2y}{dx^2} + \sum_{i=1}^{4} \frac{1+u_i}{x-e_i} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{f_4(x)} \left\{ \sum_{i=1}^{4} \frac{v_i f'_4(e_i)}{x-e_i} + w \right\} y = 0$$

mit der Bedingung

$$(7)\quad \sum_{i=1}^{4} u_i = -2\,.$$

Ganz entsprechend findet man für die Differentialgleichung *2.* Ordnung mit *3 im Endlichen* liegenden singulären Punkten e_i und dem *unendlich fernen* Punkt als 4. singulärer Stelle die Gestalt: *)

$$(A_\infty)\quad \frac{d^2y}{dx^2} + \sum_{i=1}^{3} \frac{1+u_i}{x-e_i} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{f_3(x)} \left\{ \sum_{i=1}^{3} \frac{v_i f'_3(e_i)}{x-e_i} + v_\infty x + \omega \right\} y = 0\,,$$

*) Zur Unterscheidung der Funktionen $f(x)$ ist der Grad als Index beigefügt.

wo ω den willkürlichen Parameter, v_∞ das Produkt der zu $x = \infty$ gehörigen Verzweigungsexponenten bedeutet, deren Summe sich aus der Bedingung ergibt:

$$(7') \qquad -u_\infty = 2 + \sum_{i=1}^{3} u_i \,.$$

Die Gleichwertigkeit der Formen (A) und (A_∞) werden wir in § 1 des zweiten Abschnitts dieses Kapitels nachweisen.

B.

Differentialgleichung 3. Ordnung.

Wie im vorigen Abschnitt verfahren wir bei der Ermittlung der Normalform für die Differentialgleichung 3. Ordnung mit drei singulären Punkten e_i $(i = 1, 2, 3)$, von denen zunächst keiner im Unendlichen liegen soll.

Die Gleichung

$$(1) \qquad \frac{d^3 y}{dx^3} + p_1(x) \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + p_2(x) \cdot \frac{dy}{dx} + p_3(x) \cdot y = 0$$

geht durch die Substitution

$$(2) \qquad x = \frac{1}{\xi}$$

über in

$$(1') \quad -\xi^6 \frac{d^3 y}{d\xi^3} - \xi^4 \left\{ 6\xi - p_1\left(\frac{1}{\xi}\right) \right\} \frac{d^2 y}{d\xi^2} - \xi^2 \left\{ 6\xi^2 - 2\xi\, p_1\left(\frac{1}{\xi}\right) + p_2\left(\frac{1}{\xi}\right) \right\} \frac{dy}{d\xi} + p_3\left(\frac{1}{\xi}\right) \cdot y = 0 \,.$$

Der bereits benutzte Ansatz für die Stetigkeit der Koeffizienten im Punkte $\xi = 0$ liefert

$$(3) \qquad \begin{aligned} p_1(x) &= \frac{6}{x} - \frac{a_0}{x^2} - \frac{a_1}{x^3} - \cdots \\ p_2(x) &= \frac{6}{x^2} - \frac{2a_0}{x^3} + \frac{b_0 - 2a_1}{x^4} + \cdots \\ p_3(x) &= \frac{c_0}{x^6} + \frac{c_1}{x^7} + \frac{c_2}{x^8} + \cdots \end{aligned}$$

mit noch unbestimmten a_i, b_i, c_i. Es werden hiernach im Unendlichen $p_1(x)$ zur ersten, $p_2(x)$ zur zweiten, $p_3(x)$ zur 6. Ordnung Null; die Residuen von $p_1(x)$ und $x\,p_2(x)$ sind beide gleich 6.

Setzen wir

$$f(x) = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3) \tag{4}$$
$$p_1(x) = \frac{g_1(x)}{f(x)}\,,\quad p_2(x) = \frac{g_2(x)}{f(x)^2}\,,\quad p_3(x) = \frac{g_3(x)}{f(x)^3}\,,$$

so bedeuten die $g_i(x)$ Funktionen vom zweiten, vierten und dritten Grad.

Zum Punkte e_i gehört die determinierende Fundamentalgleichung:

$$r(r-1)(r-2) + r(r-1)\frac{g_1(e_i)}{f'(e_i)} + r\frac{g_2(e_i)}{f'(e_i)^2} + \frac{g_3(e_i)}{f'(e_i)^3} = 0 \tag{5}$$

oder

$$F_i(r) \equiv r^3 + a_i r^2 + b_i r + c_i = 0. \tag{5'}$$

Mit den Koeffizienten sind die Verzweigungsexponenten durch die Gleichungen verbunden

$$\left.\begin{aligned} \sum_{k=1}^{3} r_{ik} &= -a_i = 3 - \frac{g_1(e_i)}{f'(e_i)}\,, \\ \sum^{k<l} r_{ik}\, r_{il} &= b_i = 2 - \frac{g_1(e_i)}{f'(e_i)} + \frac{g_2(e_i)}{f'(e_i)^2}\,, \\ r_{i1}\, r_{i2}\, r_{i3} &= -c_i = -\frac{g_3(e_i)}{f'(e_i)^3}\,, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

zu denen noch die Fuchssche Relation hinzutritt:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = -3\,. \tag{7}$$

Durch Partialbruchzerlegung erhält man:

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} p_1(x) &= \frac{g_1(x)}{f(x)} = \sum^{i} \frac{g_1(e_i)}{f'(e_i)(x-e_i)} = \sum^{i} \frac{3+a_i}{x-e_i}; \\ p_2(x) &= \frac{g_2(x)}{f(x)^2} = \frac{1}{f(x)}\left\{\varphi(x) + \sum^{i} \frac{g_2(e_i)}{f'(e_i)(x-e_i)}\right\} \\ &= \frac{1}{f(x)}\left\{\varphi(x) + \sum^{i} \frac{(a_i+b_i+1)f'(e_i)}{x-e_i}\right\} \\ p_3(x) &= \frac{g_3(x)}{f(x)^3} = \frac{1}{f(x)^2}\left\{t + \sum^{i} \frac{g_3(e_i)}{f'(e_i)(x-e_i)}\right\} \\ &= \frac{1}{f(x)^2}\left\{t + \sum^{i} \frac{c_i f'(e_i)^2}{x-e_i}\right\}. \end{aligned}\right.$$

Unter Benützung von

$$(9)\qquad \frac{1}{x-e_i} = \frac{1}{x} + \frac{e_i}{x^2} + \frac{e_i^2}{x^3} + \cdots\cdots$$

entwickeln wir die Ausdrücke (8) in Reihen, welche wir mit den Darstellungen (3) vergleichen.

Aus

$$p_1(x) = \sum (3+a_i)\left(\frac{1}{x} + \frac{e_i}{x^2} + \cdots\right)$$

ergibt sich hiernach das System von Gleichungen

$$\sum^{i} (3+a_i) = 6$$

oder

$$\sum a_i = -3\,,$$

übereinstimmend mit (7), ferner

$$\sum (3 + a_i)\, e_i = -\mathfrak{a}_0\,,$$

$$\sum (3 + a_i)\, e_i^2 = -\mathfrak{a}_1\,,$$

usw.

(10)

In

$$p_2(x) = \frac{\varphi(x)}{f(x)} + \frac{1}{f(x)} \sum \frac{(a_i + b_i + 1) f'(e_i)}{x - e_i}$$

liefert das letzte Glied bei Entwicklung nach fallenden Potenzen von x erst x^{-4}; setzen wir

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^{3} \frac{d_i}{x - e_i} \tag{11}$$

und ermitteln die zugehörige Reihe, so folgen aus (8) die Gleichungen

$$\sum d_i = 0\,,$$

$$\sum e_i\, d_i = 6\,, \tag{12}$$

$$\sum e_i^2\, d_i = -2\,\mathfrak{a}_0.$$

Wir bezeichnen

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ e_1^2 & e_2^2 & e_3^2 \end{vmatrix} = (e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2) \equiv \Delta \tag{13}$$

und erhalten aus (12)

$$d_1 = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 6 & e_2 & e_3 \\ -2a_0 & e_2^2 & e_3^2 \end{vmatrix} = \frac{6\,(e_2^2 - e_3^2) + 2\,a_0\,(e_2 - e_3)}{\Delta},$$

woraus nach (10) wird

$$(14) \qquad d_1 = \frac{(e_2 - e_3)\left\{6\,(e_2 + e_3) - 2\overset{i}{\Sigma}(3 + a_i)\,e_i\right\}}{(e_2 - e_3)\,(e_3 - e_1)\,(e_1 - e_2)} = \frac{6\,e_1 + 2\overset{i}{\Sigma}a_i\,e_i}{f'(e_1)}.$$

Entsprechend findet man d_2 und d_3; hieraus folgt:

$$(11') \qquad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \sum^{k} \frac{6\,e_k + 2\overset{i}{\Sigma}a_i\,e_i}{f'(e_k)\,(x - e_k)} - \sum^{k} \frac{\varphi(e_k)}{f'(e_k)\,(x - e_k)},$$

also

$$(15) \qquad \varphi(x) = 6\,x + 2\sum^{i} a_i\,e_i\,.$$

Aus der Entwicklung von $p_3(x)$ geht hervor, dass t ein *willkürlicher Parameter* ist.

Die Differentialgleichung 3. Ordnung mit *drei im Endlichen* liegenden singulären Stellen hat demnach die *Normalform*:

$$(B) \quad \frac{d^3y}{dx^3} + \sum_{i=1}^{3} \frac{3 + a_i}{x - e_i}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{f(x)}\left\{6\,x + 2\overset{i}{\Sigma}a_i\,e_i + \sum_{i=1}^{3} \frac{(a_i + b_i + 1)f'(e_i)}{x - e_i}\right\}\frac{dy}{dx}$$

$$+ \frac{1}{f(x)^2}\left\{t + \sum_{i=1}^{3} \frac{c_i f'(e_i)^2}{x - e_i}\right\}y = 0$$

wobei

$$(16) \qquad \sum_{i=1}^{3} a_i = -3$$

ist.

Analog ergibt sich als Form der Differentialgleichung 3. Ordnung mit den Punkten e_1, e_2, ∞:

$$(B_x) \qquad \frac{d^3 y}{d x^3} + \sum_{1,2}^{i} \frac{3 + a_i}{x - e_i} \frac{d^2 y}{d x^2} +$$

$$\frac{1}{(x-e_1)(x-e_2)} \left\{ (1 - a_\infty + b_\infty) + (e_1 - e_2) \left[\frac{a_1 + b_1 + 1}{x - e_1} - \frac{a_2 + b_2 + 1}{x - e_2} \right] \right\} \frac{dy}{dx}$$

$$+ \frac{1}{(x-e_1)^2 (x-e_2)^2} \left\{ \tau - c_\infty x + (e_1 - e_2)^2 \sum_{1,2}^{i} \frac{c_i}{x - e_i} \right\} y = 0 \; ;$$

hierin ist τ der willkürliche Parameter; a_x, b_x, c_x sind die Koeffizienten der determinierenden Fundamentalgleichung für $x = \infty$, wobei

$$(17) \qquad - a_\infty = 3 + \sum_{1,2}^{i} a_i$$

sein muss.

Im § 1 des nächsten Abschnitts werden wir die Form (B_x) ableiten.

2. Abschnitt.

Ausübung der fundamentalen Transformationen.

Wir gehen nun zur Untersuchung der Veränderungen über, welche durch die beiden nachstehenden Transformationen der unabhängigen und der abhängigen Veränderlichen in den Differentialgleichungen hervorgerufen werden.

Es sind dies:

I. Die lineare Transformation der unabhängigen Variablen

$$(I) \qquad x = \frac{A\,\xi + B}{C\,\xi + D} \, ,$$

wo wir

$$A\,D - B\,C \neq 0$$

voraussetzen.

Durch diese Transformation können wir drei beliebige Punkte (z. B. Verzweigungsstellen) nach drei ebenfalls willkürlichen Punkten verlegen. Die Beziehung zwischen alter und neuer Lage aller andern Punkte ist dadurch eindeutig festgelegt.

II. Die Transformation der abhängigen Variablen

$$y = \prod_{i}^{i} (x - e_i)^{\rho_i} \cdot z \qquad (i = 1, 2, \cdots k) \tag{II}$$

mit der Bedingung

$$\sum_{i=1}^{k} \rho_i = 0 \,,$$

damit z im Unendlichen stetig bleibt. Diese Substitution erlaubt uns, über $(k - 1)$ Verzweigungsexponenten frei zu verfügen.

§ 1.

Lineare Transformation der unabhängigen Veränderlichen.

Die lineare Transformation, welche die drei singulären Punkte e_1, e_2 e_3 in die neuen Stellen ε_1, ε_2, ε_3 überführt, können wir in der Form ansetzen:

$$\frac{(x - e_1)(e_2 - e_3)}{(x - e_3)(e_2 - e_1)} = \frac{(\xi - \varepsilon_1)(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)}{(\xi - \varepsilon_3)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}. \tag{1}$$

Bringen wir dieselbe auf die Gestalt

$$x = \frac{A\,\xi + B}{C\,\xi + D}, \tag{1a}$$

so bestimmen sich die vier Konstanten, von denen nur drei wesentlich sind, auf folgende Weise:

$x = 0$ ergibt nach (1):

$$\frac{(\xi - \varepsilon_1)\ (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)}{(\xi - \varepsilon_3)\ (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} = \frac{e_1\,(e_2 - e_3)}{e_3\,(e_2 - e_1)}$$

und nach (1a)

$$A\,\xi + B = 0.$$

Identifizieren wir diese beiden Gleichungen, so folgt:

(2) $$A = [e_2\, e_3\, (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)]\ ,\ B = [\varepsilon_1\, e_2\, e_3\, (\varepsilon_3 - \varepsilon_2)]\ ,$$

also

(3) $$A\,\xi + B = [e_2\, e_3\, (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)\, (\xi - \varepsilon_1)]\ ,$$

wo die eckigen Klammern Summen vorstellen, die man durch zyklische Vertauschung der Indices 1, 2, 3 aus den von ihnen eingeschlossenen Ausdrücken erhält.

Ebenso liefert $x = \infty$

$$\frac{(\xi - \varepsilon_1)\,(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)}{(\xi - \varepsilon_3)\,(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} = \frac{e_2 - e_3}{e_2 - e_1}$$

und

$$C\,\xi + D = 0\ ;$$

wir finden also

(4) $$C = [e_1\, (\varepsilon_3 - \varepsilon_2)]\ ,\ D = [e_1\, \varepsilon_1\, (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)]$$

und

(5) $$C\,\xi + D \equiv N(\xi) = [e_1\, (\varepsilon_3 - \varepsilon_2)\, (\xi - \varepsilon_1)]\ .$$

Hiernach wird:

(1b) $$x = \frac{[e_2\, e_3\, (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)\, (\xi - \varepsilon_1)]}{[e_1\, (\varepsilon_3 - \varepsilon_2)\, (\xi - \varepsilon_1)]}\ .$$

Damit ist dann der zu einem beliebigen (z. B. einem weiteren singulären) Punkte e_4 gehörige Punkt ε_4 festgelegt:

(6) $$\varepsilon_4 = \frac{[\varepsilon_1\, (\varepsilon_3 - \varepsilon_2)\, (e_2\, e_3 + e_1\, e_4)]}{[(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)\, (e_2\, e_3 + e_1\, e_4)]}\ .$$

Weiter folgt:

(7) $$x - e_i = \frac{A\,\xi + B}{C\,\xi + D} - \frac{A\,\varepsilon_i + B}{C\,\varepsilon_i + D} = \frac{\Delta}{N_i\, N(\xi)} \cdot (\xi - \varepsilon_i)$$

und

$$e_i - e_k = \frac{\Delta}{N_i\, N_k}(\varepsilon_i - \varepsilon_k)\ , \tag{8}$$

wo

$$N_i = N(\varepsilon_i)\ ,\ \Delta = A\,D - B\,C \tag{9}$$

bedeutet. Ferner wird

$$f_4(x) = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)(x - e_4) \tag{10}$$

zu

$$f_4(x) = \frac{\Delta^4}{N.\ N(\xi)^4}\ .\ \varphi_4(\xi)\ , \tag{10'}$$

wo

$$N = N_1\, N_2\, N_3\, N_4\ ,\ \varphi_4(\xi) = (\xi - \varepsilon_1)(\xi - \varepsilon_2)(\xi - \varepsilon_3)(\xi - \varepsilon_4) \tag{11}$$

gesetzt ist. Nach (8) folgt

$$f'_4(e_i) = \frac{\Delta^3}{N_i^2\, N}\ .\ \varphi'_4(\varepsilon_i)\ . \tag{12}$$

Schreibt man:

$$N_1 = e_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + e_3(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(\varepsilon_1 - \varepsilon_3),$$

so wird

$$N_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)(e_2 - e_3) = \varphi'_3(\varepsilon_1)\ .\ (e_2 - e_3)$$

und allgemein

$$N_i = \varphi_3'(\varepsilon_i)(e_k - e_l)\ , \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{13}$$

wo

$$f_3(x) = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)\ ,\ \varphi_3(\xi) = (\xi - \varepsilon_1)(\xi - \varepsilon_2)(\xi - \varepsilon_3) \tag{14}$$

ist. Führen wir ein

$$P = (e_1 - e_2)(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)\ ,\ \Pi = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)\ , \tag{15}$$

so folgt:

$$N_1\, N_2\, N_3 = \varphi'_3(\varepsilon_1)\,\varphi'_3(\varepsilon_2)\,\varphi'_3(\varepsilon_3)\,.\,(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2) = -P\,\Pi^2. \tag{16}$$

Aus (8) ergibt sich

$$P = \frac{\Delta^3}{(N_1\, N_2\, N_3)^2} \,.\, \Pi = \frac{\Delta^3}{P^2 \,.\, \Pi^3}$$

und daher

$$\Delta = P \,.\, \Pi \;, \quad N_1\, N_2\, N_3 = -\,\Delta\, \Pi \;. \tag{17}$$

Schliesslich wird

$$f_3(x) = \frac{\Delta^3}{N_1\, N_2\, N_3 \;.\; N(\xi)^3} \cdot \varphi_3(\xi) = -\,P^2\, \Pi\, \frac{\varphi_3(\xi)}{N(\xi)^3} \;. \tag{18}$$

Durch Differentiation finden wir:

$$\frac{d\,\xi}{d\,x} = \frac{N(\xi)^2}{\Delta} \;, \quad \frac{d^2\,\xi}{d\,x^2} = \frac{2\,C \,.\, N(\xi)^3}{\Delta^2} \tag{19}$$

und daher

$$\frac{dy}{dx} = \frac{N(\xi)^2}{\Delta}\, \frac{dy}{d\xi} \;,$$

$$\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = \frac{N(\xi)^3}{\Delta^2} \left\{ N(\xi)\, \frac{d^2\,y}{d\,\xi^2} + 2\,C\, \frac{dy}{d\xi} \right\}, \tag{20}$$

$$\frac{d^3\,y}{d\,x^3} = \frac{N(\xi)^4}{\Delta^3} \left\{ N(\xi)^2\, \frac{d^3\,y}{d\,\xi^3} + 6\,C\,N(\xi)\, \frac{d^2\,y}{d\,\xi^2} + 6\,C^2\, \frac{dy}{d\xi} \right\}.$$

A.

Differentialgleichung 2. Ordnung.

Wenden wir die lineare Transformation auf die Differentialgleichung 2. Ordnung mit vier im Endlichen gelegenen singulären Stellen an, so ergibt sich für dieselbe die Gestalt:

$$\frac{N(\xi)^4}{\Delta^2}\, \frac{d^2\,y}{d\,\xi^2} + \left\{ 2\,C + \sum_{i=1}^{4} \frac{(1 + u_i)\, N_i}{\xi - \varepsilon_i} \right\} \frac{N(\xi)^3}{\Delta^2}\, \frac{dy}{d\xi}$$

$$+ \frac{N \,.\, N(\xi)^4}{\varphi_4(\xi) \,.\, \Delta^4} \left\{ \frac{\Delta^2\, N(\xi)}{N} \sum_{i=1}^{4} \frac{v_i\, \varphi_4'(\varepsilon_i)}{N_i (\xi - \varepsilon_i)} + w \right\} y = 0 \;.$$

Berücksichtigen wir, dass

$$\frac{N(\xi)}{N_i} = \frac{C\,\varepsilon_i + D + C\,(\xi - \varepsilon_i)}{C\,\varepsilon_i + D} = 1 + C\frac{\xi - \varepsilon_i}{N_i}$$

und

$$\frac{N_i}{N(\xi)} = 1 - C\,\frac{\xi - \varepsilon_i}{N(\xi)}$$

ist, so lautet die Gleichung nach Division durch $\frac{N(\xi)^4}{\Delta^2}$

$$(A_1) \qquad \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \sum_{i=1}^{4} \frac{1 + n_i}{\xi - \varepsilon_i} \cdot \frac{dy}{d\xi} + \frac{1}{\varphi_4(\xi)} \left(\sum_{i=1}^{4} \frac{r_i \varphi_4'(\varepsilon_i)}{\xi - \varepsilon_i} + \omega \right) y = 0\,,$$

wo

$$\omega = -\frac{N_4}{P} \cdot w + C \sum_{i=1}^{4} \frac{v_i \varphi_4'(\varepsilon_i)}{N_i} = \frac{\sum_{i=1}^{3} e_i (\varepsilon_i - \varepsilon_4)(\varepsilon_l - \varepsilon_k)}{(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)} \cdot w$$

$$(21) \qquad + \sum_{i=1}^{3} e_i (\varepsilon_l - \varepsilon_k) \left(\sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_4}{e_k - e_l} + v_4 \cdot \frac{(\varepsilon_4 - \varepsilon_1)(\varepsilon_4 - \varepsilon_2)(\varepsilon_4 - \varepsilon_3)}{\sum_{i=1}^{3} e_i (\varepsilon_i - \varepsilon_4)(\varepsilon_k - \varepsilon_l)} \right)$$

ist. Es ergibt sich hieraus der Satz:

Uebt man auf die Differentialgleichung 2. Ordnung mit vier im Endlichen liegenden singulären Stellen e_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ die lineare Transformation (I) *aus, welche drei der Verzweigungsstellen e_i nach vorgegebenen Punkten ε_i $(i = 1, 2, 3)$ verlegt, so bleiben die Exponenten, zu denen die Integrale der Fundamentalsysteme gehören, erhalten; der neue Parameter stellt eine lineare Funktion des alten dar, deren Koeffizienten von den Konstanten der Ausgangsgleichung und von den ε_i abhängen.*

Die im 1. Abschnitt § 2 A angegebene Form (A_∞) der Differentialgleichung 2. Ordnung mit den singulären Punkten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \infty$ lässt sich hiernach leicht aus der Form (A) für die Gleichung mit den Stellen e_1, e_2, e_3, e_4 ableiten:

Während wir bisher von vier gegebenen Punkten drei nach drei anderen willkürlichen Stellen verlegt haben, nehmen wir jetzt nur drei Verzweigungs-

punkte e_i $(i = 1, 2, 3)$ der ursprünglichen Differentialgleichung als fest an und fragen nach der Lage des 4. Verzweigungspunktes e_4, wenn die neue Differentialgleichung die singulären Stellen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \infty$ haben soll.

Aus (1 a) folgt, dass der Punkt $\xi = \infty$ dem Punkte

$$e_4 = \frac{A}{C} = \frac{[e_2\, e_3\, (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)]}{[e_1\, (\varepsilon_3 - \varepsilon_2)]} \tag{22}$$

zugeordnet ist.

Nach Ermittlung einiger Grenzübergänge für $\varepsilon_4 = \infty$ nimmt die Differentialgleichung 2. Ordnung mit den Verzweigungspunkten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \infty$ die Gestalt an

$$(\mathrm{A}_\infty) \quad \frac{d^2 y}{d\,\xi^2} + \sum_{i=1}^{3} \frac{1 + u_i}{\xi - \varepsilon_i} \cdot \frac{dy}{d\xi} + \frac{1}{\varphi_3(\xi)} \left\{ \sum_{i=1}^{3} \frac{v_i \varphi'_3(\varepsilon_i)}{\xi - \varepsilon_i} + v_\infty\, \xi + \omega \right\} y = 0,$$

wo

$$\omega = C \sum_{i=1}^{3} \frac{v_i \varphi'_3(\varepsilon_i)}{N_i} - v_\infty \frac{D}{C} + \Pi\, C\, w$$

$$= \sum_{i=1}^{3} e_i\, (\varepsilon_l - \varepsilon_k) \sum_{i=1}^{3} \frac{v_i}{e_k - e_l} + v_\infty \cdot \frac{\sum_{i=1}^{3} e_i\, \varepsilon_i\, (\varepsilon_k - \varepsilon_l)}{\sum_{i=1}^{3} e_i\, (\varepsilon_k - \varepsilon_l)} \tag{23}$$

$$+ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\, (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)\, (\varepsilon_3 - \varepsilon_1) \sum_{i=1}^{3} e_i\, (\varepsilon_l - \varepsilon_k) \cdot w$$

den neuen Parameter darstellt. u_∞, v_∞ sind die Koeffizienten der zu $\xi = \infty$ gehörigen determinierenden Fundamentalgleichung. Die Fuchssche Relation verlangt:

$$-u_\infty = 2 + \sum_{i=1}^{3} u_i \cdot \tag{24}$$

B.

Differentialgleichung 3. Ordnung.

Die Ausübung der linearen Transformation (I) auf die unabhängige Variable der Differentialgleichung 3. Ordnung mit drei im Endlichen gelegenen singulären Stellen e_1, e_2, e_3 ergibt:

$$(25) \qquad \sum_{i}^{3}{}_{1} \frac{3 + a_i}{x - e_i} = \frac{N(\xi)}{\Delta} \cdot \sum^{i} \frac{(3 + a_i) N_i}{\xi - \varepsilon_i},$$

woraus wegen

$$\sum^{i} a_i = -3 \ , \ N_i = N(\xi) - C(\xi - \varepsilon_i)$$

wird

$$(25') \qquad \sum^{i} \frac{3 + a_i}{x - e_i} = \frac{N(\xi)^2}{\Delta} \sum^{i} \frac{3 + a_i}{\xi - \varepsilon_i} - \frac{6\,C \,.\, N(\xi)}{\Delta} \ ;$$

ferner finden wir:

$$(26) \quad \frac{1}{f_3(x)^2} \left\{ t + \sum^{i} \frac{c_i f'_3 (e_i)^2}{x - e_i} \right\} = \frac{N(\xi)^6}{P^2 \Delta^2 \varphi_3(\xi)^2} \left\{ t + \frac{\Delta N(\xi)}{\Pi^2} \sum^{i} \frac{c_i \varphi_3' (\varepsilon_i)^2}{(\xi - \varepsilon_i) N_i} \right\}.$$

Wir schreiben die Differentialgleichung zunächst:

$$(27) \qquad \frac{d^3 y}{d \xi^3} + P_1(\xi) \cdot \frac{d^2 y}{d \xi^2} + P_2(\xi) \cdot \frac{dy}{d\xi} + P_3(\xi) \cdot y = 0 \cdot$$

Da die Verzweigungsexponenten keine Veränderung erleiden, bleiben die Konstanten a_i, b_i, c_i bestehen, was sich z. B. durch Berechnung von

$$(28)\quad P_1(\xi) = \frac{6\,C}{N(\xi)} + \frac{\Delta}{N(\xi)^2}\left\{\frac{N(\xi)^2}{\Delta}\sum_{i=1}^{3}\frac{3+a_i}{\xi-\varepsilon_i} - \frac{6\,C\,N(\xi)}{\Delta}\right\} = \sum_{i=1}^{3}\frac{3+a_i}{\xi-\varepsilon_i}$$

bestätigt. Deshalb unterdrücken wir die etwas umständliche Ermittlung von

$$(29)\qquad P_2(\xi) = \frac{1}{\varphi_3(\xi)}\left\{6\,\xi + 2\sum_{i=1}^{3} a_i\,\varepsilon_i + \sum_{i=1}^{3}\frac{(a_i+b_i+1)\,\varphi'_3(\varepsilon_i)}{\xi-\varepsilon_i}\right\}$$

und betrachten sofort den Koeffizienten von y; derselbe lautet

$$(30)\qquad P_3(\xi) = \frac{\Delta}{P^2\,\varphi_3(\xi)^2}\left\{t + \frac{\Delta\,N(\xi)}{\Pi^2}\cdot\sum_{i=1}^{3}\frac{c_i\,\varphi'_3(\varepsilon_i)^2}{(\xi-\varepsilon_i)\,N_i}\right\}.$$

Ersetzen wir hierin

$$N(\xi) = \varphi'_3(\varepsilon_i)\,(e_k - e_l) + C\,(\xi-\varepsilon_i),$$

so erhalten wir für die Gleichung (27) den Ausdruck

$$\frac{d^3y}{d\xi^3} + \sum_{i=1}^{3}\frac{3+a_i}{\xi-\varepsilon_i}\cdot\frac{d^2y}{d\xi^2}$$

$$(B_1)\qquad + \frac{1}{\varphi_3(\xi)}\left\{6\,\xi + 2\sum_{i=1}^{3} a_i\,\varepsilon_i + \sum_{i=1}^{3}\frac{(a_i+b_i+1)\,\varphi'_3(\varepsilon_i)}{\xi-\varepsilon_i}\right\}\frac{dy}{d\xi}$$

$$+ \frac{1}{\varphi_3(\xi)^2}\left\{\tau + \sum_{i=1}^{3}\frac{c_i\,\varphi'_3(\varepsilon_i)^2}{\xi-\varepsilon_i}\right\}y = 0,$$

wo

$$\tau = \frac{\Pi}{P}\cdot t + C\sum_{i=1}^{3}\frac{c_i\,\varphi'_3(\varepsilon_i)}{e_k - e_l}$$

$$(31)\qquad = \frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\,(\varepsilon_2-\varepsilon_3)\,(\varepsilon_3-\varepsilon_1)}{(e_1-e_2)\,(e_2-e_3)\,(e_3-e_1)}\cdot t + \sum_{i=1}^{3} e_i\,(\varepsilon_k-\varepsilon_l)\sum_{i=1}^{3}\frac{c_i\,\varphi'_3(\varepsilon_i)}{e_k-e_l}$$

bedeutet.

Wie im vorigen Abschnitt erhalten wir den Satz:

Die lineare Transformation (I) der unabhängigen Veränderlichen hat auf die Differentialgleichung 3. Ordnung mit 3 im Endlichen liegenden singulären Stellen ausser der Verlegung der letzteren nur den Einfluss, dass der Parameter sich linear ändert.

Durch Spezialisieren erhalten wir die Form (B_∞) der Differentialgleichung 3. Ordnung mit den singulären Punkten ε_1, ε_2, ∞, die wir in § 2 B des 1. Abschnitts erwähnt haben; sie lautet:

$$(B_\infty) \qquad \frac{d^3y}{d\xi^3} + \sum_{1,2}^{i} \frac{3 + a_i}{\xi - \varepsilon_i} \cdot \frac{d^2y}{d\xi^2}$$

$$+ \frac{1}{(\xi - \varepsilon_1)(\xi - \varepsilon_2)} \left\{ (1 - a_\infty + b_\infty) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \left[\frac{a_1 + b_1 + 1}{\xi - \varepsilon_1} - \frac{a_2 + b_2 + 1}{\xi - \varepsilon_2} \right] \right\} \frac{dy}{d\xi}$$

$$+ \frac{1}{(\xi - \varepsilon_1)^2 (\xi - \varepsilon_2)^2} \left\{ \tau - c_\infty \xi + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 \sum_{1,2}^{i} \frac{c_i}{\xi - \varepsilon_i} \right\} y = 0 \ ,$$

wo

$$(32) \quad \tau = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \left[\frac{t}{(e_1 - e_2)(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)} + (e_1 - e_2) \left(\frac{c_1}{e_2 - e_3} + \frac{c_2}{e_1 - e_3} \right) \right]$$

$$+ \frac{c_3}{e_1 - e_2} \left[\varepsilon_1 (e_2 - e_3) - \varepsilon_2 (e_1 - e_3) \right]$$

gesetzt ist.

§ 2.

Transformation der abhängigen Veränderlichen.

A.

Differentialgleichung 2. Ordnung.

Wir untersuchen zunächst den Einfluss der Transformation:

$$y = \prod^{i} (x - e_i)^{n_i} \cdot z, \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{1}$$

wo

$$\sum_{i=1}^{4} n_i = 0 \tag{2}$$

ist, auf die Differentialgleichung 2. Ordnung mit vier im Endlichen liegenden singulären Stellen.

Es ist

$$\frac{dy}{dx} = \prod^{i} (x - e_i)^{n_i} \left\{ \frac{dz}{dx} + \sum^{i} \frac{n_i}{x - e_i} \cdot z \right\},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \prod^{i} (x - e_i)^{n_i} \cdot \tag{3}$$

$$\left\{ \frac{d^2 z}{d x^2} + 2 \sum^{i} \frac{n_i}{x - e_i} \cdot \frac{dz}{dx} + \left[\sum^{i} \frac{n_i (n_i - 1)}{(x - e_i)^2} + 2 \sum^{i<k} \frac{n_i n_k}{(x - e_i)(x - e_k)} \right] \cdot z \right\}$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die Gleichung (A) erhalten wir wieder eine Differentialgleichung von derselben Gestalt, deren Verzweigungsexponenten $l'_i = l_i - n_i$ und $m_i' = m_i - n_i$ werden; wir bezeichnen sie mit:

$$(A') \qquad \frac{d^2 z}{dx^2} + \sum^{i} \frac{1}{x - e_i} \frac{u_i'}{} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{1}{f(x)} \left\{ \sum^{i} \frac{v'_i f'(e_i)}{x - e_i} + w' \right\} z = 0$$

Zur Vereinfachung der weiteren Berechnung dient nun folgende Ueberlegung:

Die Verzweigungsexponenten der Gleichung (A) sind Lösungen der determinierenden Fundamentalgleichungen

$$(4) \qquad F_i(r) \equiv r^2 + u_i r + v_i = 0;$$

für die neuen Verzweigungsexponenten sollen diese Gleichungen lauten:

$$(5) \qquad F'_i(r') = r'^2 + u'_i r' + v'_i = 0.$$

Da aber $r_i' = r_i - n_i$ wird, so muss die Identität bestehen

$$(6) \qquad F_i(r' + n_i) = F'(r').$$

Nach der Taylorschen Entwicklung ergibt sich:

$$(7) \qquad F_i(r' + n_i) = F_i(n_i) + r' F_i^{(1)}(n_i) + \frac{r'^2}{2} F_i^{(2)}(n_i).$$

Weil nun

$$F_i^{(1)}(r) = 2r + u_i, \quad F_i^{(2)}(r) = 2$$

ist, so folgt

$$(8) \qquad u_i' = u_i + 2n_i; \quad v'_i = v_i + u_i n_i + n_i^2.$$

Vergleichung der Koeffizienten von z liefert die Forderung

$$(9) \qquad \frac{1}{f(x)} \left\{ \sum^{i} \frac{v'_i f'(e_i)}{x - e_i} + w' \right\} = \frac{1}{f(x)} \left\{ \sum^{i} \frac{v_i f'(e_i)}{x - e_i} + w \right\}$$

$$+ \sum^{i} \frac{n_i}{x - e_i} \cdot \sum^{i} \frac{1 + u_i}{x - e_i} + \sum^{i} \frac{n_i (n_i - 1)}{(x - e_i)^2} + 2 \sum^{i<k} \frac{n_i n_k}{(x - e_i)(x - e_k)}.$$

Da der neue Parameter w' wieder eine Konstante sein muss, so können wir so fortfahren, um seinen Wert zu ermitteln:

Wir multiplizieren (9) mit $f(x)$ und setzen v_i' ein; dann folgt

$$w' - w = -\sum^{i} \frac{u_i + n_i}{x - e_i} \cdot n_i f'(e_i) \tag{10}$$

$$+ f(x) \left\{ \sum^{i} \frac{n_i}{x - e_i} \sum^{i} \frac{1 + u_i}{x - e_i} + \sum^{i} \frac{n_i (n_i - 1)}{(x - e_i)^2} + 2 \sum^{i<k} \frac{n_i n_k}{(x - e_i)(x - e_k)} \right\}$$

oder

$$w' - w = -\sum^{i} \frac{u_i + n_i}{x - e_i} \cdot n_i f'(e_i) \tag{10'}$$

$$+ f(x) \left\{ \sum^{i} \frac{n_i}{x - e_i} \sum^{i} \frac{1 + u_i}{x - e_i} + \left(\sum^{i} \frac{n_i}{x - e_i} \right)^2 - \sum^{i} \frac{n_i}{(x - e_i)^2} \right\}$$

Setzen wir

$$\sum^{i} \frac{n_i}{x - e_i} = \frac{\psi(x)}{f(x)}, \tag{11}$$

so wird

$$\psi(x) = [n_1 (x - e_2)(x - e_3)(x - e_4)], \tag{12}$$

wo jetzt die Indices 1, 2, 3, 4 zu vertauschen sind.

Wegen (2) ist dies eine quadratische Funktion

$$\psi(x) = \lambda x^2 + \mu x + \nu = \lambda (x - \rho)(x - \sigma), \tag{12'}$$

wo

$$\begin{aligned} \lambda &= -[n_1 (e_2 + e_3 + e_4)] = [e_1 n_1] \equiv [e, n], \\ \mu &= [n_1 (e_2 e_3 + e_3 e_4 + e_4 e_2)] \equiv (e, n), \\ \nu &= -[n_1 e_2 e_3 e_4] \equiv -\{e, n\} \end{aligned} \tag{12''}$$

bedeuten, und wo ρ, σ die Wurzeln von $\psi(x) = 0$ sind.

Durch Differentiation von

$$\sum^{i} \frac{n_i}{x - e_i} = \frac{\lambda (x - \rho)(x - \sigma)}{f(x)} \tag{11'}$$

folgt

$$(13) \qquad \sum^{i} \frac{n_i}{(x-e_i)^2} = \lambda \frac{(x-\rho)(x-\sigma)f'(x) - (2x-\rho-\sigma)f(x)}{f(x)^2} .$$

Für $x = \rho$ wird

$$\sum^{i} \frac{n_i}{\rho - e_i} = 0 \quad , \quad \sum^{i} \frac{n_i}{(\rho - e_i)^2} = \lambda \frac{\sigma - \rho}{f(\rho)},$$

also

$$(10'') \qquad w' - w = -\sum^{i} \frac{u_i + n_i}{\rho - e_i} n_i f'(e_i) + \lambda(\rho - \sigma).$$

Da aber

$$(12''') \qquad \lambda(x-\rho)(x-\sigma) = [n_1(x-e_2)(x-e_3)(x-e_4)]$$

ist, so folgt für $x = e_i$

$$\lambda(\rho - e_i)(\sigma - e_i) = n_i f'(e_i).$$

Wir finden somit

$$w' - w = \lambda\left\{(\rho-\sigma) - \sum^{i}(u_i+n_i)(\sigma-e_i)\right\} = \lambda \sum^{i}(u_i+n_i)e_i - \mu$$

oder

$$w' - w = [e, n] \cdot [e, (u+n)] - (e, n),$$

woraus man nach Einsetzung von (12'') und einfacher Umrechnung findet:

$$w' - w = \sum^{i} n_i e_i \cdot \sum^{i}(u_i + n_i + 1)e_i - \sum^{i} n_i e_i^{\,2}.$$

Dieser Ausdruck ist eine quadratische quaternäre Form der e_i, welche von den u_i und n_i abhängig ist.

Das Resultat fassen wir zusammen in den Satz:

Die Transformation (II), ausgeübt auf die abhängige Veränderliche der Differentialgleichung 2. Ordnung mit 4 singulären Punkten, vermindert die Verzweigungsexponenten um die betreffenden Werte in (II), während die Verzweigungspunkte unver-

ändert bleiben. Der Parameter hingegen erfährt eine Vermehrung um eine bestimmte quaternäre quadratische Form der Verzweigungsstellen mit Koeffizienten, die aus den ursprünglichen Exponenten und den sie ändernden Grössen gebildet sind.

Nunmehr treffen wir *spezielle Annahmen* über *beide* Transformationen und lassen dieselben einander folgen; wegen der benutzten Form üben wir jedoch zweckmässig (I) auf die Differentialgleichung (A') aus. Dieser Uebergang entspricht demjenigen von der Riemannschen zur Gaussschen Differentialgleichung.

Wir wählen in (II)

(14) $$n_i = l_i \qquad (i = 1, 2, 4);$$

hierdurch werden

(15) $$l'_i = 0, \quad m'_i = m_i - l_i \qquad (i = 1, 2, 4)$$

und

(15′) $$l'_3 = l_3 - n_3 = \sum_{i=1}^{4} l_i \equiv \alpha$$

$$m'_3 = m_3 - n_3 = m_3 - l_3 + \sum_{i=1}^{4} l_i \equiv \beta.$$

Wir finden weiter:

(16) $$u'_i = l_i - m_i \; ; \; v'_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 4)$$

und

(16′) $$u'_3 = -(\alpha + \beta) \quad ; \quad v'_3 = \alpha\beta \; ;$$

die Fuchssche Relation erhält hierdurch die Gestalt:

(17) $$\alpha + \beta - u'_1 - u'_2 - u'_4 = 2.$$

In (I) setzen wir:

(18) $$\varepsilon_1 = 0, \; \varepsilon_2 = 1, \; \varepsilon_3 = \infty \; ;$$

somit lauten die Konstanten:

(19) $$A = e_3 (e_2 - e_1) \quad ; \quad B = e_1 (e_3 - e_2) \; ;$$
$$C = e_2 - e_1 \qquad ; \quad D = e_3 - e_2 \; ,$$

wonach der Punkt e_4 übergeht in

$$\varepsilon_4 = \mathfrak{e} = \frac{(e_4 - e_1)(e_2 - e_3)}{(e_4 - e_3)(e_2 - e_1)}. \tag{20}$$

Durch Einsetzen obiger Werte ergibt sich nach Ausführung einiger Grenzübergänge für die Differentialgleichung folgende Form: *)

$$\begin{aligned} &\xi(\xi - 1)(\xi - \mathfrak{e})\frac{d^2z}{d\xi^2} \\ &+\left\{(\alpha + \beta + 1)\xi^2 - [(\gamma + \delta)\mathfrak{e} + (\alpha + \beta + 1 - \delta)]\xi + \gamma\mathfrak{e}\right\}\frac{dz}{d\xi} \\ &+ (\alpha\beta\xi + \omega')z = 0, \end{aligned} \tag{21}$$

welche ein *Analogon zur Gaussschen Differentialgleichung* darstellt.

Hierin haben wir gesetzt

$$1 + u'_1 = \gamma \quad ; \quad 1 + u'_2 = \delta. \tag{22}$$

Die Fuchssche Beziehung lautet

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta + u'_4. \tag{17'}$$

Der Parameter hat den Wert

$$\omega' = \alpha\beta\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_2} - \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{e_3 - e_4}w', \tag{23}$$

wo

$$w' = w + \sum^{i} e_i l_i \sum^{i} e_i (u'_i - l_i + 1) - \sum^{i} l_i e_i^2$$

ist.

*) Diese Gleichung stimmt überein mit der von Herrn Heun, Math. Annalen Bd. 33, S. 165, Gl. (12).

B.

Differentialgleichung 3. Ordnung.

Transformieren wir in der Differentialgleichung 3. Ordnung mit drei im Endlichen liegenden singulären Stellen die unabhängige Variable durch

$$(1) \qquad y = \prod^{i} (x - e_i)^{\rho_i} \cdot z \,, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

wo

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{3} \rho_i = 0$$

vorauszusetzen ist, so lässt sich auch hier (wie in § 2 A) Vereinfachung der Rechnung erzielen:

Die Verzweigungsexponenten r_{ij} der Ausgangsgleichung (B) genügen den determinierenden Fundamentalgleichungen:

$$(3) \qquad F_i(r) \equiv r^3 + a_i r^2 + b_i r + c_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3);$$

die neuen Verzweigungsexponenten seien Lösungen von

$$(4) \qquad F'_i(r') = r'^3 + a'_i r'^2 + b'_i r' + c'_i = 0 .$$

Da die r'_{ij} in die $r'_{ij} = r_{ij} - \rho_i$ übergehen, so muss

$$(5) \qquad F_i(r' + \rho_i) = F'_i(r')$$

werden. Die Taylorsche Entwicklung liefert

$$(6) \qquad F_i(r' + \rho_i) = F_i(\rho_i) + r' F_i^{(1)}(\rho_i) + \frac{r'^2}{2} F_i^{(2)}(\rho_i) + \frac{r'^3}{6} F_i^{(3)}(\rho_i);$$

es ergeben sich also aus

$$F_i^{(1)}(r) = 3r^2 + 2a_i r + b_i; \; F_i^{(2)}(r) = 2(3r + a_i); \; F_i^{(3)}(r) = 6$$

die Werte

$$a'_i = \frac{1}{2} F_i^{(2)}(\rho_i) = a_i + 3\rho_i,$$

(7)
$$b'_i = F_i^{(1)}(\rho_i) = b_i + 2a_i\,\rho_i + 3\rho_i^2,$$
$$c'_i = F_i(\rho_i) = c_i + b_i\,\rho_i + a_i\,\rho_i^2 + \rho_i^3.$$

Aus (B) entsteht demnach folgende Differentialgleichung

(B′)
$$\frac{d^3z}{dx^3} + \sum_{i=1}^{3} \frac{3 + a'_i}{x - e_i} \cdot \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{f(x)} \Big\{ 6x + 2\sum_{i=1}^{3} a'_i\, e_i + \\ + \sum_{i=1}^{3} \frac{(a'_i + b'_i + 1) f'(e_i)}{x - e_i} \Big\} \frac{dz}{dx} + \frac{1}{f(x)^2} \Big\{ t' + \sum_{i=1}^{3} \frac{c'_i f'(e_i)^2}{x - e_i} \Big\} z = 0,$$

wo noch die Beziehung zwischen t' und t zu ermitteln ist.

Durch Differentiieren finden wir:

$$\frac{dy}{dx} = \prod^{i} (x - e_i)^{\rho_i} \Big\{ \frac{dz}{dx} + \sum^{i} \frac{\rho_i}{x - e_i} \cdot z \Big\},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \prod^{i} (x - e_i)^{\rho_i} \cdot$$

$$\Big\{ \frac{d^2z}{dx^2} + 2\sum^{i} \frac{\rho_i}{x - e_i} \frac{dz}{dx} + \Big[\sum^{i} \frac{\rho_i(\rho_i - 1)}{(x - e_i)^2} + 2 \sum^{i<k} \frac{\rho_i \rho_k}{(x - e_i)(x - e_k)} \Big] z \Big\},$$

(8)
$$\frac{d^3y}{dx^3} = \prod^{i} (x - e_i)^{\rho_i} \Big\{ \frac{d^3z}{dx^3} + 3\sum^{i} \frac{\rho_i}{x - e_i} \cdot \frac{d^2z}{dx^2} \\ + \Big[\sum^{i} \frac{\rho_i(\rho_i - 1)}{(x - e_i)^2} + 2 \sum^{i<k} \frac{\rho_i \rho_k}{(x - e_i)(x - e_k)} \Big] \frac{dz}{dx} \\ + \Big[\sum^{i} \frac{\rho_i(\rho_i - 1)(\rho_i - 2)}{(x - e_i)^3} + 3 \sum^{i \gtrless k} \frac{\rho_i(\rho_i - 1)\rho_k}{(x - e_i)^2 (x - e_k)} \\ + 6 \frac{\rho_1 \rho_2 \rho_3}{(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)} \Big] z \Big\}.$$

Den hieraus sich ergebenden Koeffizienten von z setzen wir dem obigen gleich, führen den Wert von c'_i ein und multiplizieren mit $f(x)^2$; so erhalten wir:

$$t' - t = -\sum^{i} \frac{\rho_i{}^3 + a_i\,\rho_i{}^2 + b_i\,\rho_i}{x - e_i} f'(e_i)^2$$

$$+ \sum^{i} \frac{\rho_i}{x - e_i} \cdot f(x) \left\{ 6\,x + 2 \overset{i}{\Sigma}\, a_i\, e_i + \sum^{i} \frac{(a_i + b_i + 1) f'(e_i)}{x - e_i} \right\}$$

$$+ f(x)^2 \left\{ \sum^{i} \frac{3 + a_i}{x - e_i} \left[\sum^{i} \frac{\rho_i\,(\rho_i - 1)}{(x - e_i)^2} + 2 \sum^{i<k} \frac{\rho_i\,\rho_k}{(x - e_i)\,(x - e_k)} \right] \right.$$

$$+ \sum^{i} \frac{\rho_i\,(\rho_i - 1)\,(\rho_i - 2)}{(x - e_i)^2} + 3 \sum^{i} \frac{\rho_i\,(\rho_i - 1)}{(x - e_i)^2} \left[\frac{\rho_k}{x - e_k} + \frac{\rho_l}{x - e_l} \right]$$

(9) $$\left. + \frac{6\,\rho_1\,\rho_2\,\rho_3}{(x - e_1)\,(x - e_2)\,(x - e_3)} \right\} = -\sum^{i} \frac{\rho_i{}^3 + a_i\,\rho_i{}^2 + b_i\,\rho_i}{x - e_i} f'(e_i)^2$$

$$+ f(x) \sum^{i} \frac{\rho_i}{x - e_i} \left\{ 6\,x + 2 \overset{i}{\Sigma}\, a_i\, e_i + \sum^{i} \frac{(a_i + b_i + 1) f'(e_i)}{x - e_i} \right\}$$

$$+ f(x)^2 \left\{ \sum^{i} \frac{3 + a_i}{x - e_i} \left[\left(\sum^{i} \frac{\rho_i}{x - e_i} \right)^2 - \sum^{i} \frac{\rho_i}{(x - e_i)^2} \right] \right.$$

$$\left. + \left(\sum^{i} \frac{\rho_i}{x - e_i} \right)^3 - 3 \sum^{i} \frac{\rho_i}{(x - e_i)^2} \sum^{i} \frac{\rho_i}{x - e_i} + 2 \sum^{i} \frac{\rho_i}{(x - e_i)^3} \right\}.$$

Weil die Parameter von x unabhängig sind, gehen wir ebenso vor wie in Abschnitt A dieses Paragraphen.

Wir setzen:

(10) $$\sum^{i} \frac{\rho_i}{x - e_i} = \frac{\psi(x)}{f(x)},$$

wonach

$$(11) \qquad \psi(x) = \sum^{i} \rho_i (x - e_k)(x - e_l)$$

wird; wegen (2) ergibt sich $\psi(x)$ als lineare Funktion von x

$$(11') \qquad \psi(x) = px + q = p(x - \eta),$$

wo

$$(11'') \qquad \begin{aligned} p &= -[\rho_1 (e_2 + e_3)] = [\rho_1 e_1] = [\rho, e] \\ q &= [\rho_1 e_2 e_3] = \{e, \rho\} \\ \eta &= -q : p \end{aligned}$$

bedeuten. Durch Differentiation von $\sum^{i} \frac{\rho_i}{x - e_i}$ folgt wegen (11′)

$$\sum^{i} \frac{\rho_i}{(x - e_i)^2} = p \frac{(x - \eta) f'(x) - f(x)}{f(x)^2},$$

$$(12) \qquad 2 \sum^{i} \frac{\rho_i}{(x - e_i)^3} = p \frac{(x - \eta)[2 f'(x) - f(x) f''(x)] - 2 f(x) f'(x)}{f(x)^2},$$

also für $x = \eta$:

$$\sum^{i} \frac{\rho_i}{\eta - e_i} = 0,$$

$$(12') \qquad \sum^{i} \frac{\rho_i}{(\eta - e_i)^2} = -\frac{p}{f(\eta)}$$

$$\sum^{i} \frac{\rho_i}{(\eta - e_i)^3} = -p \frac{f'(\eta)}{f(\eta)^2}.$$

Hiernach lautet die Beziehung zwischen den Parametern für $x = \eta$:

$$(9') \quad t' - t = -\sum^{i} \frac{\rho_i{}^3 + a_i \rho_i{}^2 + b_i \rho_i}{\eta - e_i} f'(e_i)^2 + p f(\eta) \sum^{i} \frac{3 + a_i}{\eta - e_i} - 2 p f'(\eta).$$

Aus den beiden Formen von $\psi(x)$ ergibt sich:

$$p(x-\eta) = \sum^{i} \rho_i (x-e_k)(x-e_l) , \tag{11'''}$$

also für $x = e_i$

$$\eta - e_i = -\frac{\rho_i}{p} f'(e_i) , \; f(\eta) = \rho_1 \rho_2 \rho_3 \cdot \frac{D}{p^3} , \tag{13}$$

wo

$$D = -f'(e_1) f'(e_2) f'(e_3) = (e_1-e_2)^2 (e_2-e_3)^2 (e_3-e_1)^2 \tag{14}$$

die Diskriminante der Funktion $f(x)$ bedeutet.

Ferner findet man

$$f'(\eta) = f(\eta) \cdot \sum^{i} \frac{1}{\eta - e_i} = -\rho_1 \rho_2 \rho_3 \cdot \frac{D}{p^2} \cdot \sum^{i} \frac{1}{\rho_i f'(e_i)} , \tag{15}$$

also

$$t' - t = p \sum^{i} (\rho_i^2 + a_i \rho_i + b_i) f'(e_i) + p f(\eta) \sum^{i} \frac{1+a_i}{\eta - e_i} \cdot \tag{9''}$$

Hierin wird:

$$p \cdot f(\eta) \cdot \sum^{i} \frac{1+a_i}{\eta - e_i} = p \sum^{i} (1+a_i)(\eta - e_k)(\eta - e_l) \tag{16}$$

$$= p \sum^{i} (1+a_i) \{ -\eta (e_k + e_l) + e_k e_l \}$$

$$= p \sum^{i} (a_i + 1) e_k e_l - q \sum^{i} (a_i + 1) e_i = [e, \rho] \{ e, a+1 \} - [e, a+1] \{ e, \rho \} ,$$

sodass schliesslich folgt:

$$(9''') \qquad t' - t = \sum^{i} e_i \rho_i \left\{ \sum^{i} (\rho_i^2 + a_i \rho_i + b_i) f'(e_i) + \sum^{i} (a_i + 1) e_k e_l \right\}$$
$$- \sum^{i} \rho_i e_k e_l \sum^{i} (a_i + 1) e_i,$$

welches eine kubische Form der e_i ist.

Wir haben also den Satz:

In der Differentialgleichung 3. Ordnung mit 3 singulären, im Endlichen liegenden Punkten wird durch die Aenderung der Verzweigungsexponenten vermittels der Transformation (II) als einzige Wirkung eine Vermehrung des Parameters um eine ternäre kubische Form der e_i hervorgerufen.

Eine besondere Gestalt nimmt obige Form der e_i an, wenn wir setzen:

$$(17) \qquad \rho_i = -\frac{a_i + 1}{3} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

wodurch beiden Bedingungen

$$(18) \qquad \sum^{i} \rho_i = 0, \quad \sum^{i} a'_i = -3$$

genügt wird. Es ergibt sich

$$(19) \qquad \sum^{i} \frac{3 + a'_i}{x - e_i} = 2 \sum^{i} \frac{1}{x - e_i} = 2 \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$(20) \qquad 6x + 2 \sum^{i} a'_i e_i + \sum^{i} \frac{(a'_i + b'_i + 1) f'(e_i)}{x - e_i} = f''(x) + \sum^{i} \frac{b'_i f'(e_i)}{x - e_i}.$$

Multipliziert mit $f'(x)$, lautet die Differentialgleichung

$$(21) \qquad \frac{d^2}{dx^2} \left\{ f(x) \frac{dz}{dx} \right\} + \sum^{i} \frac{b'_i f'(e_i)}{x - e_i} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{1}{f(x)} \left\{ t' + \sum^{i} \frac{c'_i f'(e_i)^2}{x - e_i} \right\} z = 0,$$

wo die ternäre kubische Form

$$t' - t = \sum^{i} e_i \rho_i \cdot \sum^{i} (b_i - \rho_i - 2\rho_i^2) f'(e_i) \tag{22}$$

in das Produkt einer linearen und einer quadratischen Form zerfällt.

Dem Uebergang von der Riemannschen zur Gaussschen Differentialgleichung entsprechend setzen wir in (II):

$$\rho_i = r_{i1} , \qquad (i = 1, 2) \tag{23}$$

woraus folgt

$$r'_{i1} = 0 , \quad r'_{i2} = r_{i2} - r_{i1} , \quad r'_{i3} = r_{i3} - r_{i1} \qquad (i = 1, 2) \tag{24}$$

und

$$r'_{31} = \sum_{i=1}^{3} r_{i1} \equiv \lambda ,$$

$$r'_{32} = r_{32} - r_{31} + \sum_{i=1}^{3} r_{i1} \equiv \mu , \tag{24'}$$

$$r'_{33} = r_{33} - r_{31} + \sum_{i=1}^{3} r_{i1} \equiv \nu .$$

Hiernach wird:

$$a'_i = 2 r_{i1} - r_{i2} - r_{i3}, \; b'_i = (r_{i1} - r_{i2})(r_{i1} - r_{i3}), \; c'_i = 0 \quad (i=1,2) \tag{25}$$
$$a'_3 = -(\lambda + \mu + \nu), \; b'_3 = \lambda\mu + \mu\nu + \nu\lambda, \; c'_3 = -\lambda\mu\nu.$$

Die Fuchssche Relation lautet also

$$\lambda + \mu + \nu = 3 + a'_1 + a'_2. \tag{26}$$

In (I) nehmen wir an:

$$\varepsilon_1 = 0, \; \varepsilon_2 = 1, \; \varepsilon_3 = \infty . \tag{27}$$

Wir führen ein:

$$\begin{gathered} 3 + a'_1 = \pi,\ 3 + a'_2 = \rho, \\ b'_1 = \eta,\ b'_2 = \zeta, \\ 1 + \lambda + \mu + \nu + \lambda\mu + \mu\nu + \nu\lambda = \sigma, \end{gathered} \tag{28}$$

wodurch (26) übergeht in

$$\lambda + \mu + \nu + 3 = \pi + \rho. \tag{26'}$$

Lassen wir (I) auf (II) folgen, so ergibt sich die Differentialgleichung:

$$\xi^2(\xi-1)^2\frac{d^3z}{d\xi^3} + \xi(\xi-1)[(\pi+\rho)\xi - \pi]\cdot\frac{d^2z}{d\xi^2} \tag{29}$$

$$+ [\sigma\xi^2 - (\sigma + \pi - \rho + \eta_1 - \zeta)\xi - (\pi + \eta_1 - 2)]\frac{dz}{dx} + [\lambda\mu\nu\xi - \tau'].z = 0,$$

wo

$$\tau' = \frac{1}{e_1 - e_2}\left\{\lambda\mu\nu(e_2 - e_3) + \right.$$

$$\left.\frac{1}{(e_1 - e_3)(e_3 - e_2)}\left[t + \sum^{i} e_i r_{i1}\left(\sum^{i} r_{i1}^2 + a_i r_{i1} + b_i\right\{f'(e_i) + \sum^{i}(a_i+1)e_k e_l\right) - \sum^{i} r_{i1} e_k e_l \sum^{i}(a_i+1)e_i\right]\right\}$$

gesetzt ist.

2. KAPITEL.

Untersuchung der Reduzibilität.

1. Abschnitt.

Allgemeine Betrachtungen über Reduzibilität.

§ 1.

Zerlegung von Differentialausdrücken in Differentialfaktoren.

In den vorangegangenen Betrachtungen haben wir das Auftreten eines accessorischen Parameters, seine Beziehung zur Normalform der Differentialgleichung und sein Verhalten gegenüber den fundamentalen Transformationen untersucht.

In diesem Kapitel wollen wir ermitteln, in welchen Fällen die beiden Fuchsschen Differentialgleichungen, welche einen Parameter enthalten, mit Gleichungen niedrigerer Ordnung Integrale gemeinsam haben. Bevor wir jedoch an diese Aufgabe selbst herantreten, stellen wir einige allgemeine Betrachtungen zusammen, die uns später von Nutzen sein werden.

Zur Untersuchung der Gemeinsamkeit von Integralen zwischen Differentialgleichungen sind bisher zwei Methoden angewandt worden: Herr Frobenius *) benutzt die Kenntnis der Integraldarstellungen und der Uebergangssubstitutionen, um diejenigen Gauss-Riemannschen Differentialgleichungen zu erhalten, welche durch das Integral einer Gleichung 1. Ordnung befriedigt werden. Herr Beke **)

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 76 (1873), S. 236.

**) Mathematische Annalen, Bd. 45 (1894), S. 278.

gibt ein Verfahren an, welches auf die Bestimmung der rationalen Lösungen von allgemeinen Riccatischen Differentialgleichungen führt.

Das erste Verfahren kommt für uns nicht in Betracht, weil wir über die Darstellung der Integrale keine Kenntnis voraussetzen; das zweite ersetzen wir durch ein in vielen Beziehungen verwandtes, welches der Aufgabe, die wir uns gestellt haben, besonders angepasst scheint. Diese Methode besteht in der *Zerlegung von Differentialausdrücken in symbolische Differentialfaktoren,* die unseres Wissens zur praktischen Ausführung noch nicht herangezogen wurde.

Bedeuten $A(y)$, $B(y)$, ... $R(y)$, $S(y)$ beliebige lineare homogene Differentialausdrücke von den Ordnungen n_a, n_b, ... n_r, n_s, so ist unter

$$T(y) = S\,R \ldots\ldots B\,A$$

derjenige lineare homogene Differentialausdruck von der Ordnung

$$n_t = n_a + n_b + \ldots\ldots + n_r + n_s$$

zu verstehen, welchen man durch succesive Ausübung der Differentialoperationen $A, B, \ldots\ldots R, S$ erhält, wobei zu bemerken ist, dass diese symbolische Produktbildung im allgemeinen nur assoziativen, nicht kommutativen Charakter hat.

Besteht nun aber irgend eine Identität:

$$T(y) = S_1\,R_1 \ldots\ldots B_1\,A_1 + M_2\,L_2 \ldots\ldots B_2\,A_2 + P_3\,O_3 \ldots\ldots B_3\,A_3 + \ldots,$$

so wird die lineare homogene Differentialgleichung $T(y) = 0$ befriedigt durch die gemeinschaftlichen Integrale der ebenfalls linearen homogenen Differentialgleichungen $A_1(y) = 0$, $A_2(y) = 0$ ..... Falls solche gemeinsame Integrale existieren, lässt sich derjenige Differentialausdruck $A_{1,2,\ldots}(y)$, welcher durch dieselben und nur durch sie zu Null gemacht wird, durch ein dem bekannten Euklidschen Algorithmus entsprechendes Verfahren finden. Es ist leicht ersichtlich, dass mit obiger Darstellung die folgende identisch ist:

$$T(y) = Z\,A_{1,2\ldots},$$

wo Z ein Differentialausdruck von der Ordnung gleich der Differenz der Ordnungen von $T(y)$ und $A_{1,2\ldots}(y)$ ist.

§ 2.

Reduzibilität von Fuchsschen Differentialgleichungen.

Nunmehr gehen wir zur Besprechung des Begriffes der Reduzibilität über, der von Herrn Frobenius (a. a. O.) in die Theorie der Differentialgleichungen eingeführt wurde. Dieser Begriff ist, dem jeweiligen Bedürfnis entsprechend, von diesem und andern Autoren (Beke, Loewy *) in verschiedener Weise festgelegt worden. Für den Fuchsschen Typus ergeben aber, wie wir zeigen werden, alle Festsetzungen übereinstimmend folgende Definition:

Eine Differentialgleichung vom Fuchsschen Typus heisst reduzibel, wenn sie mit irgend einer Differentialgleichung vom gleichen Typus von niedrigerer Ordnung deren sämtliche Integrale gemeinsam hat; existiert keine solche Gleichung niedrigerer Ordnung, so ist die gegebene Differentialgleichung irreduzibel."

Diese Definition umfasst auch diejenigen Fälle, in denen die Ausgangsgleichung nur durch einen Teil der Integrale einer Gleichung niedrigerer Ordnung befriedigt wird. Denn dann existiert **) stets eine Gleichung noch niedrigerer Ordnung, auf die sich beide Gleichungen zurückführen lassen, und welcher nur die betreffenden Integrale genügen. Natürlich können die gemeinsamen Integrale zweier Differentialgleichungen vom Fuchsschen Typus auch andern, demselben nicht angehörenden Differentialgleichungen (von höherer als diejenige niedrigster Ordnung) genügen; dieselben werden wir aber nicht weiter beachten.

Die Berechtigung der angegebenen Definition ergibt sich nun auf folgende Weise: Nach den Ausführungen des § 1 hat eine Fuchssche Differentialgleichung $F = 0$ mit einer Differentialgleichung niedrigerer Ordnung deren Integrale gemeinsam, wenn eine Zerlegung möglich ist

$$F = F_1 F_2.$$

Darin muss dann F_2 selbst ein Fuchsscher Differentialausdruck sein, der indessen mit einer ganz beliebigen Funktion von x multipliziert sein kann, die also

*) Loewy, Mathem. Annalen, Bd. 56 (1903), S. 549.

**) Vgl. Frobenius, a. a. O. S. 244, IV.

allen Koeffizienten gemeinschaftlich ist. Dies ergibt sich daraus, dass alle Integrale von $F_2 = 0$ auch die Gleichung $F = 0$ befriedigen, also überall bestimmtes Verhalten zeigen müssen.

Von dem willkürlichen Faktor, der eine Funktion von x ist, hängt der Charakter des Differentialausdrucks F_1 wesentlich ab. Ausser durch die Integrale von $F_2 = 0$ wird nämlich $F = 0$ auch durch solche Werte von y befriedigt, welche $F_2(y)$ zu einem Integral von $F_1 = 0$ machen. Ist nun der Faktor in F_2, als den man den ganzen Koeffizienten der höchsten Ableitung ansehen kann, so beschaffen, dass F_2 an einer endlichen Zahl von Stellen e_i, mit einer gewissen endlichen Potenz von $(x - e_i)$ multipliziert, endlich bleibt, so gehört F_1 ebenfalls, wieder abgesehen von einem gemeinsamen, sich bestimmt verhaltenden Faktor aller Koeffizienten, dem Fuchsschen Typus an.

Diese Beschaffenheit von F_1 und F_2 wird erzielt durch die Festsetzung das Rationalitätsbereichs als desjenigen aller rationalen Funktionen. Nur ist dabei zu bemerken, dass für die Fuchsschen Differentialgleichungen die Reduzibilität von der Wahl des Rationalitätsbereichs *unabhängig* ist. Denn jede Fuchssche Differentialgleichung $F = 0$, die überhaupt reduzibel ist, muss sich auch so reduzieren lassen, dass

$$F = \Phi_1 \Phi_2 \quad \text{zu} \quad F = F_1 F_2$$

wird, wo F_1 und F_2 Fuchssche Differentialausdrücke sind.

Setzen wir $F = 0$ in der Form voraus, bei welcher der Koeffizient der höchsten Ableitung gleich Eins ist, so muss, wenn $F = 0$ reduzibel ist, stets eine Zerlegung möglich sein

$$F = F_1 F_2,$$

worin F_1 und F_2 von derselben Form sind.

Wir können also unbeschadet der Allgemeinheit

1. den Rationalitätsbereich auf denjenigen aller rationalen Funktionen beschränken und

2. bei den in Betracht kommenden Fuchsschen Differentialgleichungen den Koeffizienten der höchsten Ableitung zu Eins annehmen.

Auch ohne die 2. Einschränkung gilt folgender Satz:

Wie man auch einen Fuchsschen Differentialausdruck in Differentialfaktoren mit rationalen Koeffizienten zerlegen mag, stets gehören dieselben alle dem Fuchsschen Typus an.

Wie bereits gezeigt wurde, sind, unter Voraussetzung des Rationalitätsbereichs der rationalen Funktionen, bei der Zerlegung eines Fuchsschen Differentialausdrucks in *zwei* Faktoren beide vom Fuchsschen Typus. Sei nun der Fuchssche Differentialausdruck $P(y)$ zerlegt in

$$P = Z\,Y\,X \ldots\ldots S\,R\,Q,$$

so müssen

$$Q \quad , \quad R_1 = R\,Q \quad , \ldots\ldots Y_1 = Y\,X \ldots\ldots R\,Q$$

lauter Fuchssche Differentialausdrücke (mit sich bestimmt verhaltenden Faktoren) sein, weil alle Integrale von

$$Q(y) = 0,\ R_1(y) = 0\ , \ldots\ldots,\ Y_1(y) = 0$$

die Gleichung $P(y) = 0$ befriedigen und deshalb bestimmtes Verhalten zeigen. Aus den Zerlegungen

$$P = Z\,Y_1, \quad Y_1 = Y\,X_1, \ldots\ldots, \quad R_1 = R\,Q$$

folgt weiter, dass die Differentialausdrücke

$$Q, \quad R, \quad S, \ldots\ldots Y, \quad Z$$

einzeln dem Fuchsschen Typus angehören müssen.

Mit Rücksicht auf die eingeführte Definition wollen wir unter einer reduzierten Gleichung eine solche verstehen, deren sämtliche Integrale eine vorgelegte Differentialgleichung befriedigen.

Die angegebene Reduzibilität innerhalb des Fuchsschen Typus unterwerfen wir im folgenden einer Unterteilung, deren Zweckmässigkeit wir zunächst darlegen. Wegen der Gemeinsamkeit von Integralen zwischen der gegebenen und der reduzierten Differentialgleichung muss die letztere bezüglich der singulären Stellen folgendes Verhalten zeigen: Die gemeinsamen Verzweigungspunkte der beiden Gleichungen dürfen für die Integrale der reduzierten Gleichung höchstens Singularitäten gleichen Grades wie bei der Ausgangsgleichung bedeuten. Die in der reduzierten Gleichung neu auftretenden Unstetigkeitspunkte, *zu denen auch $x = \infty$ gehören kann, wenn dieser Punkt für die Ausgangsgleichung regulär ist,*

müssen ausserwesentlich singulär *) sein, damit die Integrale in jenen Punkten stetig bleiben.

Bei einer Differentialgleichung niedrigerer Ordnung dagegen, von welcher nicht alle Integrale der Ausgangsgleichung genügen, können beliebig singuläre Stellen neu auftreten.

Weil zu einer Differentialgleichung mehrere, möglicherweise unendlich viele reduzierte Differentialgleichungen gehören können, wobei eine jede derselben im allgemeinen ungleich viele und teilweise verschiedene neue Singularitäten aufweisen wird, gelangen wir zur Einführung folgender Arten der Reduzibilität:

Eine Differentialgleichung vom Fuchsschen Typus heisst „reduzibel im engeren Sinne", wenn es mindestens eine reduzierte Gleichung gibt, welche keine andern singulären Stellen besitzt, wie die Ausgangsgleichung, „reduzibel im weiteren Sinne", wenn es unter den reduzierten Gleichungen keine der artige gibt.

So ist z. B. die Differentialgleichung der *einfachen Kugelfunktionen* nur *im weiteren Sinne reduzibel.*

Die angegebene Unterscheidung übertragen wir auch auf den von Herrn Loewy **) eingeführten Begriff der vollständigen Reduzibilität, indem wir festsetzen:

---

*) Eine ausserwesentlich singuläre Stelle unterscheidet sich von einer regulären Stelle in folgender Weise:

1. An einer regulären Stelle sind die Koeffizienten stetig, an einer ausserwesentlich singulären Stelle sind sie unstetig.

2. An beiden Stellen sind die Integrale stetig; während aber an einer regulären Stelle einer Differentialgleichung n. Ordnung die Zahlen

$$0, 1, 2, \ldots\ldots (n-1)$$

die Exponenten angeben, muss an einer ausserwesentlich singulären Stelle wenigstens einer der positiv ganzzahligen Exponenten grösser als $(n-1)$ sein.

**) Mathem. Annalen, Bd. 62 (1906), S. 89.

Eine Differentialgleichung vom Fuchsschen Typus heisst vollständig reduzibel

1. im engeren Sinne, wenn die Differentialgleichung kleinstes gemeinsames Vielfaches von solchen irreduziblen Fuchsschen Differentialgleichungen ist, von denen eine oder mehrere keine andern singulären Stellen als die gegebene Gleichung besitzen;

2. im weiteren Sinne, wenn dieselbe kleinstes gemeinschaftliches Vielfaches von nur solchen irreduziblen Fuchsschen Differentialausdrücken ist, die noch andere singuläre Stellen aufweisen.

Eine irreduzible Differentialgleichung kann hiernach als vollständig reduzibel im engeren Sinne gelten.

§ 3.

Verallgemeinerung eines Satzes von Frobenius.

Wir leiten jetzt einen Satz ab, welcher für Gleichungen n. Ordnung vom Fuchsschen Typus mit beliebig vielen singulären Stellen gültig ist. Wir gelangen zu demselben durch Verallgemeinerung des von Herrn Frobenius (a. a. O.) ausgesprochenen Satzes:

Damit die allgemeine (Riemannsche) Differentialgleichung 2. Ordnung mit 3 singulären Stellen reductibel sei, ist es notwendig und hinreichend, dass die Summe dreier Exponenten, unter denen sich von jedem singulären Punkte einer befindet, gleich einer ganzen Zahl ist.

Der entsprechende Satz lautet:

Soll eine Differentialgleichung n. Ordnung ($n \geqq 2$) *vom Fuchsschen Typus mit* k (> 2) *singulären Stellen mit einer Gleichung m. Ordnung* ($m < n$) *deren sämtliche Integrale gemeinsam haben, so ist dazu notwendig (aber nicht hinreichend), dass es wenigstens eine ganzzahlige Summe von* $m.k$ *Exponenten gibt, von denen zu jedem singulären Punkte je* m *gehören.*

Soll nämlich die Gleichung n. Ordnung mit einer solchen m. Ordnung deren Integrale gemeinsam haben, so müssen sich stets m Integrale finden lassen, die bei Umläufen nur in lineare Verbindungen ihrer selbst übergehen. Daraus folgt, dass die je m Integrale der verschiedenen Fundamentalsysteme der Gleichung m. Ordnung an den mit der Gleichung n. Ordnung gemeinsamen singulären Stellen

mit m (von den je n) Integralen der entsprechenden Systeme der Gleichung n. Ordnung übereinstimmen; es sind die Verzweigungsexponenten der ersteren mit je m von den n der letzteren identisch*). Da nun aber die Exponentensumme der Gleichung m. Ordnung ganzzahlig ist und die Exponenten der ausserwesentlich singulären Stellen ebenfalls ganze Zahlen sind, so muss auch die Summe der $m.\ k$ Exponenten eine ganze Zahl sein.

Insbesondere gilt der Satz:

Soll eine Differentialgleichung n. Ordnung ($n \geqq 2$) *vom Fuchsschen Typus mit* k (> 2) *singulären Stellen mit einer Gleichung 1. Ordnung deren Integral gemeinsam haben, so ist notwendig, dass die Summe von k Exponenten, von denen zu jedem singulären Punkte je einer gehört, gleich einer negativen ganzen Zahl ist. Ist K der absolute Wert dieser Zahl,* $\varkappa$ *die Anzahl der neuen ausserwesentlich singulären Stellen (evtl. inkl.* $x = \infty$) *der Gleichung 1. Ordnung, so bestehen für* $\varkappa$ *die Grenzen*

$$K \geqq \varkappa \geqq \frac{K}{n-1}.$$

Hieraus folgt dann sofort:

Für Gleichungen 2. Ordnung ist stets $\varkappa = K$.

Obige notwendige Bedingung ist nur für $n = 2$, $k = 3$ zugleich hinreichend, weil in allen andern Fällen noch Parameter auftreten, welche die Reduzibilität von weiteren Bedingungen abhängig machen.

Wir beweisen den letzten Satz unabhängig vom vorangehenden allgemeineren:

Ein beliebiges Integral der Gleichung n. Ordnung lässt sich durch die Elemente eines Fundamentalsystems ausdrücken

$$y = c_1\ y_1 + c_2\ y_2 + \ldots + c_n\ y_n,$$

wo die c_i Konstanten sind. Soll dieses Integral einer Gleichung 1. Ordnung genügen, so muss es die Form annehmen**):

$$y = C \cdot (x - e_1)^{l_1} \ldots (x - e_{k'})^{l_{k'}} (x - \varepsilon_1)^{\lambda_1} \ldots (x - \varepsilon_{\varkappa'})^{\lambda_{\varkappa'}},$$

wo die e_i die singulären Punkte der Gleichung n. Ordnung, die ε_j die in der

*) Vergleiche hierzu den Satz über die Fundamentalgleichung: Schlesinger I 117.

**) Es soll sein $k' = k - 1$ oder k, $\varkappa' = \varkappa - 1$ oder $\varkappa$, je nachdem $x = \infty$ zu den betreffenden Punkten zu zählen ist oder nicht.

Gleichung 1. Ordnung neu auftretenden ausserwesentlich singulären Stellen bedeuten, und wo die λ_j Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots (n-1)$ sind, weil die ε_j für die Gleichung n. Ordnung reguläre Punkte sein müssen. Identisch werden die Ausdrücke für y nur, wenn zunächst keine y_i auftreten, welche Logarithmen enthalten; weiter müssen die Differenzen der Verzweigungsexponenten der y_i ganze Zahlen sein.

Da nun das Integral sich bei beliebigen Umläufen nur mit Konstanten multipliziert und seine Darstellung deshalb für alle Punkte gilt, so folgt, dass die l_i je einen der Verzweigungsexponenten der verschiedenen singulären Punkte der Gleichung n. Ordnung bedeuten müssen. Nun ist aber die Summe der l und λ gleich dem negativen Verzweigungsexponenten für $x = \infty$; wenn k und $\varkappa$ auch $x = \infty$ umfassen, falls dieser Punkt in einer oder beiden Gleichungen singulär ist, so wird

$$\sum_{i=1}^{k} l_i + \sum_{j=1}^{\varkappa} \lambda_j = 0.$$

Beachten wir, dass die λ_j nur positiv ganzzahlig sein können, so ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{k} l_i = -\sum_{j=1}^{\varkappa} \lambda_j = -K$$

als negative ganze Zahl. *)

Aus den möglichen Werten für die λ_j ergeben sich leicht die Grenzen für $\varkappa$.

*) Hiervon zu unterscheiden ist die Zahl, welche die Ergänzung zur Summe aller Exponenten bildet und einen positiven Wert besitzt.

2. Abschnitt.

Reduzibilität von Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom Fuchsschen Typus.

§ 1.

Zerlegung von Fuchsschen Differentialausdrücken zweiter Ordnung.

Von den Sätzen über beliebige Differentialgleichungen vom Fuchsschen Typus wenden wir uns nun zur Zerlegung von Differentialausdrücken 2. Ordnnng, wobei wir zunächst solche mit beliebig vielen singulären Stellen betrachten.

Wir gehen also aus von dem allgemeinsten Differentialausdruck 2. Ordnung vom Fuchsschen Typus mit $k\,(\geqq 3)$ im Endlichen liegenden singulären Stellen:

$$(1)\quad F(y) = \frac{d^2y}{dx^2} + \sum_{i=1}^{k} \frac{1+\alpha_i}{x-e_i} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{f_k(x)} \left\{ \sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_i f'_k(e_i)}{x-e_i} + \mathfrak{F}_{\mathfrak{k}}(x) \right\} \cdot y \;,$$

wo $\mathfrak{F}_{\mathfrak{k}}(x)$ eine ganze rationale Funktion $\mathfrak{k}$. Grades von x bedeutet; je nachdem der Puukt $x=\infty$ regulär oder singulär ist, ist hierin $\mathfrak{k}$ gleich $k-4$ oder $k-2$, und die Anzahl der Parameter in $\mathfrak{F}_{\mathfrak{k}}(x)$ beträgt $k-3$ bezw. $k-2$ (für $\mathfrak{k}=3$, $x=\infty$ regulär verschwindet $\mathfrak{F}_{\mathfrak{k}}(x)$ identisch; dann stellt $F(y)=0$ die Riemannsche Differentialgleichung dar).

Die Gleichung (1) $F(y)=0$ ist reduzibel, wenn sie mit einer Gleichung 1. Ordnung deren Integral gemeinsam hat; es sei dies die Gleichung

$$(2)\qquad G(y) = \frac{dy}{dx} + \left\{ \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i}{x-e_i} + \sum_{j=1}^{\varkappa} \frac{\gamma_j}{x-\varepsilon_j} \right\} y = 0,$$

wo die γ_j alle gleich -1, $\gamma_\infty = -\left(\sum_{i=1}^{k} g_i + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j\right)$ gleich 0 oder -1 sein müssen, damit die neuen singulären Stellen ausserwesentlich singulär sind.

Es muss dann eine Zerlegung möglich sein:

$$F = H\,G \quad , \tag{3}$$

wo wir

$$H(y) \equiv \frac{dy}{dx} + \varphi(x) \cdot y \tag{4}$$

setzen. Ueber den Koeffizienten $\varphi(x)$ können wir nun folgendes aussagen: Dass $H(y)$ ein Fuchsscher Ausdruck sein muss, wissen wir bereits. Bilden wir $H\,G$, so lautet der Koeffizient von $\frac{dy}{dx}$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{g_i}{x - e_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\gamma_j}{x - \varepsilon_j} + \varphi(x) . \tag{5}$$

Vergleichen wir ihn mit dem entsprechenden in (1), so folgt

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1 + \alpha_i - g_i}{x - e_i} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\gamma_j}{x - \varepsilon_j} \; ; \tag{6}$$

hieraus ersieht man, dass in (2) und (4) die Stellen ε_j nur gleichzeitig auftreten. Wir können also den Satz aussprechen:

Ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung $F(y) = 0$ mit beliebig viel singulären Stellen reduzibel, so enthalten die Koeffizienten der Fuchsschen Differentialausdrücke, aus denen sich $F(y)$ zusammensetzen lässt, nur gleichzeitig neue im Endlichen gelegene Stellen; dieselben sind für die Gleichung 1. Ordnung, auf welche $F(y) = 0$ reduziert wird, ausserwesentlich singulär. Das Auftreten von $x = \infty$ als singulärer Stelle ist dagegen dieser Regel nicht unterworfen.

Wir führen nun den allgemeinen Ansatz weiter:

Die Bedingungen für die Reduzibilität von $F(y) = 0$ finden wir durch Identifizieren der Koeffizienten von y in $F(y)$ und HG. Es ergibt sich hieraus die Forderung

$$(R)\quad \frac{1}{f_k(x)}\left\{\sum_{i=1}^{k}\frac{\beta_i f'_k(e_i)}{x-e_i} + \mathfrak{T}_t(x)\right\} = \left\{\sum_{i=1}^{k}\frac{g_i}{x-e_i} + \sum_{j=1}^{\varkappa}\frac{\gamma_j}{x-\varepsilon_j}\right\}\cdot$$
$$\cdot\left\{\sum_{i=1}^{k}\frac{1+\alpha_i-g_i}{x-e_i} - \sum_{j=1}^{\varkappa}\frac{\gamma_j}{x-\varepsilon_j}\right\} - \left\{\sum_{i=1}^{k}\frac{g_i}{(x-e_i)^2} + \sum_{j=1}^{\varkappa}\frac{\gamma_j}{(x-\varepsilon_j)^2}\right\}.$$

Durch Multiplikation mit $f_k(x)^2 . f_\varkappa(x)^2$ und Ordnen nach Potenzen von x erhält man eine Anzahl algebraischer Gleichungen; dieselbe ist gleich

$$2(k+\varkappa-1)+1 \quad \text{oder} \quad 2(k+\varkappa-2)+1,$$

je nachdem der Punkt $x = \infty$ für $F(y) = 0$ singulär oder regulär ist. Dieses System von Gleichungen dient zur Bestimmung der Grössen γ_j, ε_j, g_i, ergibt also (ausser der Fuchsschen Relation) $k-1$ bezw. $k-3$ Bedingungen. Sind dieselben erfüllt, so ist $F(y) = 0$ reduzibel.

Für die Ausführung dieses allgemeinen Ansatzes beschränken wir uns auf Differentialgleichungen mit *einem* willkürlichen Parameter und fragen, wann dieselben *im engeren Sinne reduzibel* sind, d. h. wann sie mit einer Gleichung 1. Ordnung mit *nur denselben* singulären Stellen Integrale gemeinsam haben. Setzen wir die Zerlegung eines Differentialausdrucks in solche an, deren Koeffizienten keine *neuen im Endlichen gelegenen* singulären Stellen besitzen, so erhalten wir zugleich einige Differentialgleichungen, welche wir als *im weiteren Sinne reduzibel* abzusondern haben.

§ 2.

Die im engeren Sinne reduziblen Fuchsschen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit einem beliebigen Parameter.

In diesem Paragraphen werden wir folgende beiden Differentialgleichungen untersuchen:

a) Die Differentialgleichung 2. Ordnung mit vier im Endlichen liegenden singulären Stellen, für welche $x = \infty$ regulärer Punkt ist:

$$(A) \quad A(y) \equiv \frac{d^2y}{dx^2} + \sum_{i=1}^{4} \frac{1+u_i}{x-e_i} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{f_4(x)} \left\{ \sum_{i=1}^{4} \frac{v_i f'_4(e_i)}{x-e_i} + w \right\} y = 0;$$

hierin ist w der willkürliche Parameter; die Fuchssche Relation lautet

$$(a) \qquad \sum_{i=1}^{4} u_i = -2.$$

b) Die Differentialgleichung 2. Ordnung mit drei im Endlichen liegenden singulären Stellen, zu denen $x = \infty$ als 4. Unstetigkeitspunkt hinzukommt:

$$(B) \quad B(y) \equiv \frac{d^2y}{dx^2} + \sum_{i=1}^{3} \frac{1+\alpha_i}{x-e_i} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{f_3(x)} \left\{ \sum_{i=1}^{3} \frac{\beta_i f'_3(e_i)}{x-e_i} + \gamma x + \delta \right\} y = 0,$$

wo δ den willkürlichen Parameter, $\gamma = \beta_\infty$ das Produkt der zu den Fundamentalintegralen von $x = \infty$ gehörigen Exponenten bedeutet; die Summe dieser beiden Exponenten muss die Fuchssche Beziehung befriedigen

$$(b) \qquad \sum_{i=1}^{3} \alpha_i = -(2 + \alpha_\infty).$$

Im folgenden verwenden wir stets die abkürzende Bezeichnung:

$$(b') \qquad \sum_{i=1}^{3} \alpha_i = -\alpha,$$

nach welcher

$$(b'') \qquad \alpha_\infty = \alpha - 2$$

ist.

§ 2a.

Die Gleichung $A(y) = 0$.

Wir setzen die Zerlegung an

(1) $$A = Q\,P,$$

wo

(2) $$P(y) = \frac{dy}{dx} + \sum_{i=1}^{4} \frac{p_i}{x - e_i} \cdot y \quad , \qquad \sum^{i} p_i = p$$

$$Q(y) = \frac{dy}{dx} + \sum_{i=1}^{4} \frac{q_i}{x - e_i} \cdot y \quad , \qquad \sum^{i} q_i = q$$

Fuchssche Differentialausdrücke 1. Ordnung sind.

Identifizieren wir

(3) $$Q\,P = \frac{d^2 y}{d\,x^2} + \sum^{i} \frac{p_i + q_i}{x - e_i} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$+ \left\{ \sum^{i} \frac{p_i}{x - e_i} \cdot \sum^{i} \frac{q_i}{x - e_i} - \sum^{i} \frac{p_i}{(x - e_i)^2} \right\} y$$

mit (1), so erhalten wir die Bedingungen:

(4) $$p_i + q_i = 1 + u_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

aus denen sich durch Summieren unter Berücksichtigung von

$$\sum^{i} u_i = -2$$

ergibt

(5) $$p + q = 2\,.$$

Den Faktor von y schreiben wir

$$(6)\qquad \frac{1}{f_4(x)}\left\{\sum^{i}\frac{p_i}{x-e_i}\cdot\sum^{i}q_i(x-e_k)(x-e_l)(x-e_m)\right.$$
$$\left.-\sum^{i}\frac{p_i(x-e_k)(x-e_l)(x-e_m)}{x-e_i}\right\}.$$

Unter Anwendung der Taylorschen Entwicklung

$$(x-e_k)(x-e_l)(x-e_m)=\frac{f_4(x)}{x-e_i}=f'_4(e_i)+\frac{x-e_i}{2}f''_4(e_i)$$
$$+\frac{(x-e_i)^2}{6}f'''_4(e_i)+(x-e_i)^3,$$

wo $f_4(e_i)=0$ benutzt ist, erhält man beim Zusammenziehen

$$\frac{1}{f_4(x)}\left\{\sum^{i}\frac{p_i(q_i-1)f'_4(e_i)}{x-e_i}\right.$$
$$+\sum^{i}p_i(q_i-1)[(x-e_i)^2+(x-e_i)(3e_i-e_k-e_l-e_m)+f'_4(e_i)]$$
$$\left.+\sum^{i}p_i[q_k(x-e_l)(x-e_m)+q_l(x-e_m)(x-e_k)+q_m(x-e_k)(x-e_l)]\right\}.$$

durch Ordnen nach x folgt schliesslich

$$\frac{1}{f_4(x)}\left\{\sum^{i}\frac{p_i(q_i-1)f'_4(e_i)}{x-e_i}+x^2p(q-1)\right.$$
$$(6')\qquad +x\sum^{i}e_i[p(1-q+q_i)+p_i(q-2)]$$
$$+\sum^{i}p_i[(q_i-1)e_i(e_i-e_k-e_l-e_m)+e_ke_l(q_i+q_m-1)$$
$$\left.+e_le_m(q_i+q_k-1)+e_me_k(q_i+q_l-1)]\right\}.$$

Wir müssen also noch fordern:

$$p_i\,(q_i - 1) = v_i \;; \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{7}$$

$$p\,(q - 1) = 0\,; \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{4} e_i\,[p\,(1 - q + q_i) + p_i\,(q - 2)] = 0; \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{4} p_i\,[(q_i - 1)\,e_i\,(e_i - e_k - e_l - e_m) + e_k\,e_l\,(q_i + q_m - 1) + e_l\,e_m\,(q_i + q_k - 1) + e_m\,e_k\,(q_i + q_l - 1)] = w. \tag{10}$$

Die 12 Bedingungen (4) bis (10) zeigen, dass es im allgemeinen nicht möglich ist, die Konstanten von $A\,(y)$ auf diejenigen von $P\,(y)$ ohne Beschränkung ihrer Unabhängigkeit zurückzuführen.

Aus (5) und (8) ergeben sich die Möglichkeiten:

$$\alpha)\quad p = 1,\ q = 1 \;;$$
$$\beta)\quad p = 0,\ q = 2 \;.$$

Führen wir die durch die Bedingungen angegebenen Werte ein, so finden wir unter den Differentialgleichungen 2. Ordnung mit vier im Endlichen liegenden singulären Stellen folgende *im engeren Sinne reduzible Gattung:*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \sum_{i=1}^{4} \frac{p_i + q_i}{x - e_i} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{f_4(x)} \left\{ \sum_{i=1}^{4} \frac{p_i\,(q_i - 1)\,f'_4(e_i)}{x - e_i} + w \right\} y = 0\,, \tag{11}$$

wo w *den in* (10) *aufgestellten Ausdruck* bedeutet, und wo ausserdem die *Bedingungen* bestehen

$$\sum^{i} p_i = 0\,, \quad \sum^{i} q_i = 2. \tag{11a}$$

Im weiteren Sinne reduzibel (mit $x = \infty$ als neuem ausserwesentlich singulären Punkt) ist dagegen

$$(12)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} + \sum_{i=1}^{4} \frac{p_i + q_i}{x - e_i} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{f_4(x)} \left\{ \sum_{i=1}^{4} \frac{p_i(q_i - 1) f'_4(e_i)}{x - e_i} + w \right\} y = 0 ,$$

wenn die *Bedingungen* erfüllt sind

$$(12\,a)\qquad \sum^{i} p_i = 1 , \quad \sum^{i} q_i = 1 , \quad \sum^{i} e_i (q_i - p_i) = 0$$

und w gleich dem Ausdruck (10) ist.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, zwei unabhängige Integrale zu finden, welche dann ein Fundamentalsystem bilden:

Die Verzweigungsexponenten der reduziblen Gleichung lauten

$$(13)\qquad l_i = 1 - q_i , \quad m_i = - p_i ,$$

diejenigen der reduzierten Gleichung

$$(14)\qquad - p_i .$$

Die Differentialgleichungen $A(y) = 0$ und $P(y) = 0$ haben das Integral der letzteren

$$(15_1)\qquad y_1 = \prod^{i} (x - e_i)^{- p_i}$$

gemeinsam (wo der beliebige konstante Faktor gleich Eins gesetzt ist). $A(y) = 0$ wird aber auch befriedigt durch die Lösungen der inhomogenen Gleichung

$$(16)\qquad P(y) = u ,$$

wo u das allgemeine Integral von $Q(y) = 0$ darstellt. Da aber

$$(17)\qquad u = C_1 \prod^{i} (x - e_i)^{- q_i}$$

ist, so haben wir das allgemeine Integral von

$$(18)\qquad \frac{dy}{dx} + \sum^{i} \frac{p_i}{x - e_i} \cdot y = C_1 \prod^{i} (x - e_i)^{- q_i}$$

zu ermitteln; wir schreiben diese Gleichung

$$\prod^{i}(x-e_i)^{-p_i}\cdot\frac{d}{dx}\left(y\cdot\prod^{i}(x-e_i)^{p_i}\right)=C_1\prod^{i}(x-e_i)^{-q_i}$$

oder

$$\frac{d}{dx}\left(y\cdot\prod^{i}(x-e_i)^{p_i}\right)=C_1\prod^{i}(x-e_i)^{p_i-q_i}\quad . \tag{18'}$$

Durch Integration folgt:

$$y=C_1\cdot\prod^{i}(x-e_i)^{-p_i}\int\prod^{i}(x-e_i)^{p_i-q_i}\,dx+C_2\cdot\prod^{i}(x-e_i)^{-p_i} \tag{19}$$

als allgemeines Integral der Gleichungen $A(y)=0$ und $P(y)=u$.

Da nun der 2. Summand gleich dem 1. Integral ist, multipliziert mit einer Konstanten, so erhalten wir im allgemeinen als zweites, von y_1 linear unabhängiges Integral

$$y_2=\prod^{i}(x-e_i)^{-p_i}\int\prod^{i}(x-e_i)^{p_i-q_i}\,dx. \tag{15$_2$}$$

Die lineare Unabhängigkeit von y_1 und y_2 zeigt sich auch bei Berechnung der Determinante

$$y_1\,y'_2-y_2\,y'_1\quad ;$$

sie hat den Wert

$$\prod^{i}(x-e_i)^{-(p_i+q_i)},$$

verschwindet also nicht identisch.

Um angeben zu können, wann das 2. Integral die Gestalt des ersten annimmt, ohne mit demselben identisch zu werden, wann das 2. Integral also ebenfalls einer (von der Gleichung $P(y)=0$ verschiedenen) Gleichung 1. Ordnung genügt, welche keine andern singulären Punkte aufweist, fragen wir allgemein, wann

$$\int\prod^{i}(x-e_i)^{a_i}\,dx=\prod^{i}(x-e_i)^{b_i} \tag{20}$$

wird. Durch Differentiation dieser Gleichung erhalten wir die Bedingung

$$(21)\quad \prod^{i}(x-e_i)^{a_i} = \prod^{i}(x-e_i)^{b_i-1}\cdot\sum b_k\,(x-e_l)\,(x-e_m)\,(x-e_n)\ .$$

Soll dieselbe erfüllt sein, so müssen sich für die a_i Werte

$$b_i-1\ ,\quad b_i\ ,\quad b_i+1\quad \text{oder}\quad b_i+2$$

finden lassen, welche die Gleichungen befriedigen, die sich aus der Summe durch Nullsetzen der Koeffizienten der einzelnen Potenzen von x ergeben.

Wie sich dies auf y_1 und y_2 überträgt, ist leicht ersichtlich. Die weitere Behandlung der Frage erfolgt in § 4.

§ 2b.

Die Gleichung $B(y)=0$.

Wie vorhin setzen wir an:

$$(1)\qquad B = H\,G\ ,$$

wo

$$(2)\qquad \begin{aligned} G(y) &= \frac{dy}{dx}+\sum_{i=1}^{3}\frac{g_i}{x-e_i}\cdot y\quad ,\quad \sum^{i} g_i = g\\ H(y) &= \frac{dy}{dx}+\sum_{i=1}^{3}\frac{h_i}{x-e_i}\cdot y\quad ,\quad \sum^{i} h_i = h \end{aligned}$$

dem Fuchsschen Typus angehören.

Berechnen wir

$$(3)\quad H\,G = \frac{d^2y}{dx^2}+\sum_{i=1}^{3}\frac{g_i+h_i}{x-e_i}\cdot\frac{dy}{dx}+\left\{\sum^{i}\frac{g_i}{x-e_i}\cdot\sum^{i}\frac{h_i}{x-e_i}-\sum^{i}\frac{g_i}{(x-e_i)^2}\right\}y\ ,$$

so ergeben sich durch Vergleich des Faktors von $\frac{dy}{dx}$ in (1) und (3) die Bedingungen

$$(4)\qquad g_i+h_i = 1+\alpha_i\ ,\qquad (i=1,2,3)$$

woraus wegen

$$\sum^{i} \alpha_i = -\alpha \tag{b'}$$

durch Summation folgt

$$g + h = 3 - \alpha \,. \tag{5}$$

Den Koeffizienten von y unterwerfen wir der Umformung

$$= \frac{1}{f_3(x)} \left\{ \sum^{i} \frac{g_i}{x - e_i} \cdot \sum^{i} h_i (x - e_k)(x - e_l) - \sum^{i} \frac{g_i (x - e_k)(x - e_l)}{x - e_i} \right\}$$

$$= \frac{1}{f_3(x)} \left\{ \sum^{i} \frac{g_i (h_i - 1)(x - e_k)(x - e_l)}{x - e_i} + \sum^{i} g_i [h_k (x - e_l) + h_l (x - e_k)] \right\}. \tag{6}$$

Wir entwickeln nach Taylor

$$(x - e_k)(x - e_l) = \frac{f_3(x)}{x - e_i} = f'_3(e_i) + (x - e_i)(2 e_i - e_k - e_l) + (x - e_i)^2.$$

Hierdurch erhält (6) die Gestalt:

$$\frac{1}{f_3(x)} \left\{ \sum^{i} \frac{g_i (h_i - 1) f'_3(e_i)}{x - e_i} + x g (h - 1) \right.$$

$$\left. + \sum^{i} g_i [(h_i - 1) e_i - (h_i + h_l - 1) e_k - (h_i + h_k - 1) e_l] \right\}$$

oder, wenn wir nach den e_i ordnen

$$\frac{1}{f_3(x)} \left\{ \sum^{i} \frac{g_i (h_i - 1) f'_3(e_i)}{x - e_i} + x g (h - 1) \right.$$

$$\left. + \sum^{i} e_i [(g - 1) h_i + (h - 2) g_i] \right\}. \tag{6'}$$

Wir haben also zu verlangen:

$$g_i\,(h_i - 1) = \beta_i \;; \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{7}$$

$$g\,(h - 1) = \gamma \;; \tag{8}$$

$$\sum^{i} e_i\,[(g-1)\,h_i + (h-2)\,g_i] = \delta. \tag{9}$$

Wir sehen also, dass die Gleichung $B\,(y) = 0$ nur dann auf $G\,(y) = 0$ reduziert wird, wenn ihre acht willkürlichen Konstanten auf die 6 Unabhängigen g_i, h_i sich zurückführen lassen.

Diie Gattung von Differentialgleichungen 2. Ordnung mit drei im Endlichen liegenden singulären Stellen (zu denen $x = \infty$ hinzutritt), welche *im engeren Sinne* reduzibel ist, lautet demnach:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \sum_{i=1}^{3} \frac{g_i + h_i}{x - e_i} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{f_3\,(x)} \left\{ \sum_{i=1}^{3} \frac{g_i\,(h_i - 1)\,f'_3\,(e_i)}{x - e_i} + g\,(h-1)\,x \right. \tag{10}$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{3} e_i\,[(g-1)\,h_i + (h-2)\,g_i] \right\} y = 0,$$

wo alle Konstanten von einander unabhängig sind. [Der Ausnahmefall eines regulären $x = \infty$ folgt weiter unten].

Die Verzweigungsexponenten der reduzierten Gleichung lauten

$$-g_i\,(i = 1, 2, 3)\,; \quad -g_\infty = +g \;; \tag{11}$$

diejenigen der reduziblen Gleichung ergeben sich zu:

$$\lambda_i = 1 - h_i \;, \quad \mu_i = -g_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$$\lambda_\infty = h - 1 \;, \quad \mu_\infty = g \;. \tag{12}$$

Ebenso wie im vorigen Abschnitt finden wir als Fundamentalsystem das Paar linear unabhängiger Integrale

$$y_1 = \prod^{i} (x - e_i)^{-g_i} \;,$$

$$y_2 = \prod^{i} (x - e_i)^{-g_i} \int \prod^{i} (x - e_i)^{g_i - h_i}\, dx \;. \tag{13}$$

Bezüglich der Form des 2. Integrals gelten auch hier die Ausführungen von § 2a.

Solange der unendlich ferne Punkt singulär ist, stellt $B(y) = 0$ eine Differentialgleichung mit vier singulären Punkten dar; es sind dann im allgemeinen γ und δ nicht gleichzeitig Null.

Ist aber $\gamma = \delta = 0$ und $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = -1$, so bedeutet dies, dass der Punkt $x = \infty$ die Exponenten 0, 1 besitzt, also regulär ist; dieser Spezialfall ergibt die Riemannsche Gleichung.

Ans den Bedingungen erhalten wir für die im *engeren* Sinne reduzible Gattung Riemannscher Differentialgleichungen die Normalform

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \sum_{i=1}^{i} \frac{g_i + h_i}{x - e_i} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{f_3(x)} \sum_{i=1}^{3} \frac{g_i(h_i - 1) f'_3(e_i)}{x - e_i} \cdot y = 0 \tag{14}$$

mit den Bedingungen

$$g = 0, \quad h = 2, \quad \sum^{i} e_i h_i = 0. \tag{14a}$$

Ist

$$g = h = 1, \quad \sum^{i} e_i g_i = 0, \tag{14b}$$

so ist die Riemannsche Gleichung (14) im *weiteren* Sinne reduzibel, und zwar auf eine Gleichung mit $x = \infty$ als neuer ausserwesentlich singulärer Stelle.

§ 3.

Die Reduzibilität der Gaussschen Differentialgleichung.

Wendet man die Methode der Zerlegung in Differentialfaktoren auf die Gausssche hypergeometrische Differentialgleichung an und untersucht die Möglichkeit der Reduzibilität im engeren Sinne, so findet man folgenden Satz (dessen Ableitung wir hier unterlassen):

Die Gausssche Differentialgleichung lässt sich dann und nur dann auf eine Gleichung 1. Ordnung mit denselben singulären Stellen reduzieren, wenn eine der vier Grössen

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma-\alpha,\ \gamma-\beta$$

den Wert Null oder Eins annimmt.

Herr Frobenius beweist (a. a. O.):

Damit die Gausssche Differentialgleichung reduktibel sei, ist notwendig und hinreichend, dass eine der hypergeometrischen Reihen mit dem vierten Elemente

$$x,\ \ 1-x,\ \ \frac{1}{x},\ \ \frac{1}{1-x},\ \ \frac{x-1}{x},\ \ \frac{x}{x-1},$$

welche, mit einer Potenz von x oder $1-x$ multipliziert, ihr genügen, nur aus einer endlichen Anzahl von Gliedern besteht.

Diesem Satze wollen wir die hiermit identische (vgl. a. a. O. den Gang des Beweises und die unterschiedenen acht Fälle) Fassung*) geben:

Die Gausssche Differentialgleichung ist dann und nur dann reduzibel, wenn eine der vier Grössen

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma-\alpha,\ \gamma-\beta$$

eine beliebige ganze Zahl $\left(\gtreqless 0\right)$ *ist.*

An dem Beispiel der Gaussschen Differentialgleichung können wir ausgezeichnet die Bedeutung der Reduzibilitätseigenschaft einer Differentialgleichung für die Integraldarstellung erkennen, insbesondere aber auch den Unterschied zwischen den Integralen, welche einer Gleichung 1. Ordnung mit den einzigen singulären Stellen $0,\ 1,\ \infty$ genügen, und jenen Integralen, deren zugehörige

---

*) Das hiervon abweichende Resultat von Herrn Beke (a. a. O.) ist auf einen Vorzeichenfehler beim Einsetzen der Grössen α_i in die Gleichung (19) zurückzuführen. Die Tabelle (20) von Herrn B. wird, richtiggestellt, mit derjenigen von Herrn Frobenius identisch und lautet

(1)	(2)	(3)	(4)
$n=-\alpha$	$n=\alpha-1$	$n=\alpha-\gamma$	$n=\alpha-\gamma+1$
$n=-\beta$	$n=\beta-1$	$n=\beta-\gamma$	$n=\beta-\gamma+1.$

Ist der Grad n der ganzen rationalen Funktion $g(x)$ gleich Null, so haben wir den Fall der Reduzibilität im engeren Sinne.

Gleichung 1. Ordnung in ihren Koeffizienten noch andere Unstetigkeitspunkte aufweist. Wir betrachten zu diesem Zweck eine Tabelle der 24 Integrale der hypergeometrischen Differentialgleichung *). Erhält eine der vier Grössen α, β, $\gamma - \alpha$, $\gamma - \beta$ den Wert Null oder Eins, so wird in sechs der hypergeometrischen Reihen ein erstes oder zweites Element Null. Die Reihen nehmen also den Wert Eins an, sodass in den betreffenden Integralen nur Potenzen von x und $1 - x$ verbleiben. Diese Integrale genügen dann Gleichungen 1. Ordnung, in deren Koeffizienten keine neuen Unstetigkeitspunkte auftreten: hierdurch wird die Gleichung im engeren Sinne reduzibel. Hat dagegen eine jener 4 Grössen einen von Null und Eins verschiedenen ganzzahligen Wert, so brechen bestimmte Reihen ab (z. B. die Kugelfunktionen). Durch Nullsetzen dieser Polynome findet man diejenigen Stellen, an welchen die Integrale stetig, die Koeffizienten der zugehörigen Differentialgleichungen 1. Ordnung unstetig werden; dies sind die in der Gleichung 1. Ordnung neu auftretenden singulären Stellen. Weil die Verzweigungsexponenten der ausserwesentlich singulären Stellen mit Rücksicht auf die Ordnung der Gaussschen Gleichung nur den Wert Eins haben können, sind alle Nullstellen von einander verschieden.

§ 4.

Allgemeine Sätze über die Reduzibilität von Differentialgleichungen 2. Ordnung und über die Anzahl der zugehörigen reduzierten Gleichungen 1. Ordnung.

Nunmehr beschäftigen wir uns noch ganz allgemein mit der Entscheidung der Frage, ob eine vorgelegte Differentialgleichung 2. Ordnung vom Fuchsschen Typus reduzibel ist und mit wieviel Differentialgleichungen 1. Ordnung sie Integrale gemeinsam hat.

Wir benutzen hierbei die von Herrn Loewy (a. a. O.) aufgestellten Definitionen des Art- und des Aehnlichkeitsbegriffes:

*) Z. B. Schlesinger, Handbuch, Bd. I, S. 265.

Hat man zwei lineare homogene Differentialgleichungen

$$(1) \qquad p_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots\cdots + p_n(x)\cdot y = 0\,,$$

$$(2) \qquad r_0(x)\frac{d^{n_1} z}{dx^{n_1}} + r_1(x)\frac{d^{n_1-1} z}{dx^{n_1-1}} + \cdots\cdots + r'_{n_1}(x)\cdot z = 0\,,$$

$$(n_1 \leqq n)$$

deren Koeffizienten dem Rationalitätsbereiche angehören, so sagt man, die Gleichung (2) gehört mit (1) zu derselben Art oder ist mit (1) von derselben Art, wenn man durch die Beziehung

$$(3) \qquad z = a_0(x)\cdot y + a_1(x)\cdot\frac{dy}{dx} + \cdots\cdots + a_{n-1}(x)\cdot\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\,,$$

wobei $a_0(x), \ldots . a_{n-1}(x)$ Funktionen des Rationalitätsbereichs sind, von den Integralen der Differentialgleichung (1) zu denen der Differentialgleichung (2) übergehen kann.

Für $n = n_1$ und nur dann wird die Beziehung gegenseitig: *die Differentialgleichungen heissen dann (gegenseitig) von derselben Art.*

Für $a_1(x) = a_2(x) = \ldots\ldots = a_{n-1}(x) = 0$ nennen wir die beiden Differentialgleichungen *ähnlich.*

Daraus ergibt sich unmittelbar:

I. *Zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung vom Fuchsschen Typus, von denen die eine mit der andern von derselben Art ist, sind gegenseitig von derselben Art. Sie sind auch ähnlich, und ihre Integrale stehen in der Beziehung*

$$z = a(x)\,.\,y\,,$$

wo $a(x)$ eine rationale Funktion ist.

Dass $a(x)$ rational sein muss, liegt daran, dass der Rationalitätsbereich für den Fuchsschen Typus aus den rationalen Funktionen besteht. Wir können stets $a(x)$ in die Form setzen:

$$a(x) = \prod^{i} (x - e_i)^{p_i}\,,$$

wo die e_i die Null- oder Unendlichkeitsstellen der Funktion sind und die p_i beliebige *ganze* Zahlen bedeuten.

Aus allgemeineren Sätzen von Herrn Loewy folgen:

II. *Eine reduzible Differentialgleichung 2. Ordnung kann nur entweder mit einer oder mit zwei oder mit unendlich vielen Differentialgleichungen 1. Ordnung deren Integrale gemeinsam haben.*

III. *Eine Differentialgleichung 2. Ordnung hat mit unendlich viel Differentialgleichungen 1. Ordnung Integrale gemeinsam, sobald sie befriedigt wird durch die Integrale von entweder mehr als zwei solcher Gleichungen oder zwei solcher Gleichungen, welche ähnlich sind.*

Auf Grund dieser und früherer Sätze ergeben sich für eine vorgelegte Differentialgleichung 2. Ordnung mit k singulären Stellen (evtl. mit $x = \infty$) folgende Möglichkeiten:

A. Ist *keine* der Summen von je k Exponenten (von denen keine zwei zu demselben singulären Punkte gehören) ganzzahlig, so ist die Gleichung irreduzibel.

B. Ist *nur eine* Summe von k Exponennten eine ganze Zahl, so kann die Gleichung höchstens mit einer Gleichung 1. Ordnung deren Integral gemeinsam haben. Ob dies der Fall ist oder ob die Gleichung irreduzibel ist, hängt davon ab, ob das für den negativen Summenwert als $-\varkappa$ bezw. $-(\varkappa + 1)$ aus dem allgemeinen Ansatz (R) hervorgehende Gleichungssystem erfüllt ist.

C. Sind *zwei oder mehr* Summen negativ ganzzahlig, so ist die Untersuchung des Ansatzes (R) erforderlich. Allgemein wird man so vorgehen, dass man den grössten Absolutwert der negativ ganzzahligen Summen als $\varkappa$ annimmt; dieser Wert gibt dann den Höchstbetrag von ausserwesentlich singulären Stellen (inkl. $x = \infty$), die in einer der Gleichungen 1. Ordnung auftreten können. Unter Zulassung des Wegfallens einiger der $\varkappa$ Stellen führt man den in § 1 angegebenen Ansatz (R) für $\varkappa$ soweit durch, bis man erkennt, dass:

α) *kein* Gleichungssystem erfüllt ist, dann ist die Gleichung irreduzibel;

β) *nur ein* Gleichungssystem befriedigt ist, dann genügt ein Integral einer Gleichung 1. Ordnung;

γ) *zwei* Systeme der Bedingungsgleichungen erfüllt sind. Anstatt in diesem Falle γ) die Untersuchung der Gleichungen weiter zu betreiben, kann man durch Aufstellen und Vergleichen der Integrale, wie wir im Falle der engeren Reduzibilität angedeutet haben, direkt ersehen, ob die Funktion $a(x)$

γ_1) *rational* ist, wozu notwendig alle p_i ganze Zahlen sein müssen; dann hat die Differentialgleichung zweiter Ordnung mit unendlich viel Gleichungen 1. Ordnung, die alle ähnlich sind, Integrale gemeinsam;

γ_2) *nicht rational* ist; dann hat die Gleichung 2. Ordnung mit nur zwei Gleichungen 1. Ordnung deren Integrale gemeinsam.

Sehen wir ab von dem trivialen Falle der Irreduzibilität, so ist nur in den Fällen *B*) und *C*γ) die Gleichung vollständig reduzibel, und zwar im engeren Sinne dann, wenn sie mit einer der in § 2 aufgestellten Gattungen identifiziert werden kann. Im Falle β ist die Gleichung 1. Ordnung die zugehörige grösste vollständig reduzible Differentialgleichung*).

Bezüglich der Untersuchung der Bedingungssysteme auf Lösbarkeit fügen wir noch folgende Bemerkungen hinzu:

Weil als Verzweigungsexponenten der ausserwesentlich singulären Stellen nur die Zahlen Null und Eins in Betracht kommen, kann man durch Einsetzen solcher Werte die Gleichungen vereinfachen. Besteht ferner zwischen der grössten und der kleinsten Exponentensumme ein grösserer Unterschied, so wird man den Vorteil des alle Fälle umfassenden Ansatzes mit maximalem $\varkappa$ fallen lassen und mit dem kleinsten Wert beginnen; dies insbesondere dann, wenn eine Exponentensumme Null ist, wo also die Möglichkeit der Reduzibilität im engeren Sinne vorliegt: hier sind dann keine ε_j und γ_j zu bestimmen.

In jedem Falle ist also die Entscheidung über die Reduzibilität der Differentialgleichung 2. Ordnung auf die Untersuchung einer endlichen Anzahl von Systemen von ebenfalls endlich viel algebraischen Gleichungen zurückgeführt.

---

*) Nach Herrn Loewy ist die zu einer Differentialgleichung gehörige grösste vollständig reduzible Differentialgleichung diejenige vollständig reduzible Gleichung, deren sämtliche Integrale der Ausgangsgleichung genügen, und welche andrerseits durch alle Integrale befriedigt wird, welche die Ausgangsgleichung mit Gleichungen niedrigerer Ordnung gemeinsam hat.

3. Abschnitt.

Reduzibilität von Fuchsschen Differentialgleichungen dritter Ordnung.

§ 1.

Zerlegung des Fuchsschen Differentialausdrucks 3. Ordnung mit einem Parameter.

Während wir im 2. Abschnitt die Betrachtungen fast überall allgemein durchgeführt haben, wollen wir uns hier auf die Untersuchung der Gleichung 3. Ordnung mit einem willkürlichen Parameter beschränken; zudem befassen wir uns nur mit dem Fall, dass alle drei singulären Stellen der Differentialgleichung im Endlichen liegen. Sehen wir jedoch von den Berechnungen des § 2 ab, so bleiben die Aussagen für beliebige Fuchssche Differentialgleichungen 3. Ordnung bestehen.

Wir erhalten alle reduziblen Gleichungen 3. Ordnung mit drei singulären Stellen, indem wir nach solchen Gleichungen fragen, welche mit Gleichungen niedrigerer Ordnung deren sämtliche Integrale gemeinsam haben. Diese Fälle ergeben sich durch die Zerlegungen des Fuchsschen Ausdrucks C der 3. Ordnung

$$C = D_2 D_1 \qquad \text{und} \qquad C = D_1 D_2 \ ,$$

wo D_1, D_2 Fuchssche Ausdrücke 1. und 2. Ordnung sind.

Wie im 2. Abschnitt ergibt sich auch hier (durch Vergleichung der Koeffizienten von $-\frac{d^2 y}{d x^2}\Big)$, dass ausserwesentlich singuläre, im Endlichen gelegene Stellen nur gleichzeitig in D_1 und D_2 neu auftreten können. Ebenso können, wenn D_2 selbst zerlegbar ist, seine Faktoren weitere singuläre Stellen nur gleichzeitig erhalten.

Wir werden nun im nächsten Paragraphen alle diejenigen Gleichungen ermitteln, welche mit solchen Gleichungen 1. oder 2. Ordnung alle Integrale ge-

meinsam haben, die nur dieselben 3 singulären Stellen aufweisen: die *im engeren Sinne reduziblen* Gleichungen 3. Ordnung mit einem Parameter. Indem wir auch hier zunächst das Auftreten von $x = \infty$ zulassen, erhalten wir ausserdem einige Fälle der Reduzibilität im weiteren Sinne.

Ausser den beiden angeführten Zerlegungen werden wir noch den in ihnen gemeinsam enthaltenen Spezialfall betrachten, wo sich die Gleichung 3. Ordnung auf eine solche 2. Ordnung und diese auf eine solche 1. Ordnung zurückführen lassen, ohne dass in den Koeffizienten neue ausserwesentlich singuläre Stellen auftreten (also abgesehen von $x = \infty$).

§ 2.

Die im engeren Sinne reduziblen Fuchsschen Gleichungen 3. Ordnung mit einem Parameter.

§ 2a.

Reduktion auf eine Differentialgleichung 1. Ordnung.

In diesem Teile handelt es sich um diejenigen Fälle, in denen die linke Seite von

(C)
$$C(y) \equiv \frac{d^3 y}{d x^3} + \sum_{i=1}^{3} \frac{3 + a_i}{x - e_i} \cdot \frac{d^2 y}{d x^2}$$
$$+ \frac{1}{f(x)} \left\{ 6x + 2 \sum_{i}^{i} a_i e_i + \sum_{i=1}^{3} \frac{(a_i + b_i + 1) f'(e_i)}{x - e_i} \right\} \cdot \frac{dy}{dx}$$
$$+ \frac{1}{f(x)^2} \left\{ t + \sum_{i=1}^{3} \frac{c_i f'(e_i)^2}{x - e_i} \right\} \cdot y = 0,$$

wo

(1)
$$\sum_{i=1}^{3} a_i = -3$$

ist, sich in das Produkt $D\,P$ eines Fuchsschen Differentialausdrucks D der 2. Ordnung und eines solchen P der 1. Ordnung zerlegen lässt, wo

(P) $$P(y) \equiv \frac{dy}{dx} + \sum^{i} \frac{p_i}{x - e_i} \cdot y \,,$$

(2) $$\sum^{i} p_i = p,$$

ist und p eine positive ganze Zahl (inkl. Null) sein muss.

(3) Aus der Identität (3) $C = D\,P$ folgt, dass ausser durch die Integrale von $P = 0$ die Gleichung $C = 0$ auch befriedigt wird, wenn

(4) $$P(y) = \vartheta$$

irgend ein Integral von $D(\vartheta) = 0$ ist. Durch Integration erhält man

(5) $$y = \prod^{i} (x - e_i)^{-p_i} \left\{ \int \vartheta \prod^{i} (x - e_i)^{p_i} \, dx + k \right\};$$

damit dieses Integral für $x = \infty$ stetig bleibt, müssen die Verzweigungsexponenten von ϑ den Forderungen genügen

$$\lambda_\infty \geqq 1 \quad , \quad \mu_\infty \geqq 1;$$

somit ergibt sich für $\alpha_\infty = -(\lambda_\infty + \mu_\infty)$

$$\alpha_\infty \leqq -2$$

und daher wegen

(6) $$\sum^{i} \alpha_i = -(2 + \alpha_\infty) = -\alpha$$

(6') $$\alpha \leqq 0 \,.$$

Hieraus folgt zunächst, dass als D nur der Differentialausdruck 2. Ordnung mit 3 im Endlichen liegenden singulären Stellen in Betracht kommen kann

(D) $$D(y) \equiv \frac{d^2 y}{d x^2} + \sum_{i=1}^{3} \frac{1 + \alpha_i}{x - e_i} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{f(x)} \left\{ \sum_{i}^{3}{}_{1} \frac{\beta_i f'(e_i)}{x - e_i} + \gamma x + \delta \right\} y$$

mit der Beziehung (6); hierin ist $\gamma \quad \beta_\varkappa = \lambda_\varkappa \cdot \mu_\varkappa$, δ der Parameter. Weil $x = 0$ regulär oder ausserwesentlich singulär sein muss, kann $\alpha_\varkappa = -2$ d. h. $\alpha = 0$ nicht in Betracht kommen; hiervon machen wir auf der nächsten Seite Anwendung.

Bilden wir

$$D\,P = \frac{d^3\,y}{d\,x^3} + \sum^{i} \frac{1 + \alpha_i + p_i}{x - e_i} \cdot \frac{d^2\,y}{d\,x^2}$$

$$+ \left\{ \sum^{i} \frac{1 + \alpha_i}{x - e_i} \sum^{i} \frac{p_i}{x - e_i} - 2 \sum^{i} \frac{p_i}{(x - e_i)^2} + \frac{1}{f\,(x)} \left[\gamma\,x + \delta + \sum^{i} \frac{\beta_i\,f'\,(e_i)}{x - e_i} \right] \right\} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$+ \left\{ 2 \sum^{i} \frac{p_i}{(x - e_i)^3} - \sum^{i} \frac{p_i}{x - e_i} \sum^{i} \frac{1 + \alpha_i}{x - e_i} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{f\,(x)} \left[\gamma\,x + \delta + \sum^{i} \frac{\beta_i\,f'\,(e_i)}{x - e_i} \right] \cdot \sum^{i} \frac{p_i}{x - e_i} \right\} y\,,$$

so erhalten wir durch Vergleich die Bedingungen

(7) $$1 + \alpha_i + p_i = 3 + a_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

woraus wegen (1) durch Summation folgt

(8) $$\alpha = p - 3\,.$$

Der Koeffizient von $\frac{dy}{dx}$ lautet

(9) $$\frac{1}{f\,(x)} \left\{ \gamma\,x + \delta + \sum^{i} \frac{\beta_i\,f'\,(e_i)}{x - e_i} \right.$$

$$\left. + \sum^{i} \frac{1 + \alpha_i}{x - e_i} \sum^{i} p_i\,(x - e_k)\,(x - e_l) - 2 \sum^{i} \frac{p_i\,(x - e_k)\,(x - e_l)}{x - e_i} \right\}$$

$$= \frac{1}{f\,(x)} \left\{ x \left[\gamma + (1 - \alpha)\,(3 + \alpha) \right] + \left[\delta + \sum^{i} e_i \Big(p\,(\alpha + \alpha_i) - p_i\,(\alpha + 1) \Big) \right] \right.$$

$$\left. + \sum^{i} \frac{[\beta_i + p_i\,(\alpha_i - 1)]\,f'\,(e_i)}{x - e_i} \right\};$$

er liefert die Bedingungen:

$$\beta_i + p_i(\alpha_i - 1) = a_i + b_i + 1 \quad ; \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{10}$$

$$\gamma = (\alpha - 1)(\alpha + 3) + 6 \quad ; \tag{11}$$

$$\delta = \sum^{i} e_i \left[2\,a_i + p_i(\alpha + 1) - p_i(\alpha + \alpha_i) \right] . \tag{12}$$

Weil nach einer früheren Ueberlegung $\alpha = 0$ ausgeschlossen ist, erhalten wir aus (11) für α die Grenzen

$$-3 \leqq \alpha < 0 \quad ; \tag{13}$$

weil α nach (8) mit p ganzzahlig sein muss, verbleiben also die Möglichkeiten:

$$\alpha = -1, -2, -3 . \tag{14}$$

Der Faktor von y lässt sich schreiben

$$\frac{1}{f(x)^2} \Bigg\{ \sum^{i} p_i (x - e_k)(x - e_l) \left[\gamma\, x + \delta + \sum^{i} \frac{\beta_i f'(e)}{x - e_i} \right]$$

$$+ 2 \sum^{i} \frac{p_i (x - e_k)^2 (x - e_l)^2}{x - e_i} - \sum^{i} (1 + \alpha_i)(x - e_k)(x - e_l) \cdot \tag{15}$$

$$\cdot \sum^{i} \frac{p_i (x - e_k)(x - e_l)}{x - e_i} \Bigg\}$$

und nimmt nach einigen Umformungen die Gestalt an

$$\frac{1}{f(x)^2} \Bigg\{ \sum^{i} \frac{p_i(\beta_i - \alpha_i + 1) f'(e_i)^2}{x - e_i} + x^3 \cdot (\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3) \tag{15'}$$

$$+ k_1 x^2 + k_2 x + k_3 \Bigg\} ,$$

wo die k_λ folgende Ausdrücke bedeuten

$$k_1 = p\left\{\delta + \sum^{i} e_i\,(1-\alpha_i)\right\} + (\gamma + 2\,\alpha)\left\{\sum^{i} e_i\,p_i - p\sum^{i} e_i\right\};$$

$$k_2 = p\sum^{i}\beta_i f'(e_i) - \delta\sum^{i} p_i\,(e_k+e_l) + \gamma\sum^{i} p_i\,e_k\,e_l$$

$$+\sum^{i} p_i\left[e_i^2(1-\alpha_i)+e_k^2(\alpha+\alpha_k)+e_l^2\,(\alpha+\alpha_l)+2\,e_k\,e_l(\alpha-\alpha_i)\right];$$

(15″)

$$k_3 = \delta\sum^{i} p_i\,e_k\,e_l - \sum^{i} p_i\,(\alpha_i-1)f'(e_i)\,(e_i-e_k-e_l)$$

$$+\sum^{i}\beta_i f'(e_i)\left[e_i\,p_i - e_k\,(p-p_k) - e_l(p-p_l)\right]$$

$$-\sum^{i} p_i\,e_k\,e_l\left[e_i\,(\alpha_i-1)+e_k\,(\alpha+\alpha_k)+e_l(\alpha+\alpha_l)\right].$$

Dies ergibt noch die Forderungen

$$p_i\,(\beta_i-\alpha_i+1) = c_i \quad ; \qquad (i=1,\,2,\,3) \tag{16}$$

$$(\alpha+1)\,(\alpha+2)\,(\alpha+3) = 0 \quad ; \tag{17}$$

woraus wir wieder die Werte (14) finden; ferner

$$k_1 = k_2 = 0 \quad ; \tag{18}$$

$$k_3 = t \ . \tag{19}$$

Aus den vorstehenden 16 Bedingungen erhält man nach Bestimmung der Konstanten von D und P noch sechs Relationen zwischen denen von C.

Wir finden somit als *Gattung von Differentialgleichungen 3. Ordnung mit drei im Endlichen liegenden singulären Stellen*, die auf eine Gleichung 1. Ordnung im *engeren* Sinne reduzibel sind:

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \sum_{i=1}^{3} \frac{1 + \alpha_i - p_i}{x - e_i} \cdot \frac{d^2x}{dx^2} + \frac{1}{f(x)} \left\{ 6x + 2 \sum_{i=1}^{3} (\alpha_i + p_i - 2) \right.$$

(20)
$$\left. + \sum_{i=1}^{3} \frac{\{\beta_i + p_i(\alpha_i - 1)\} f'(e_i)}{x - e_i} \right\} \frac{dy}{dx}$$

$$+ \frac{1}{f(x)^2} \left\{ t + \sum_{i=1}^{3} \frac{p_i(\beta_i - \alpha_i + 1) f'(e_i)^2}{x - e_i} \right\} y = 0 ,$$

wo die Bedingungen (12), (18), (19) zu erfüllen sind und ausserdem

(21) $$\alpha = -3 \quad , p = 0 \ , \quad \text{also } \gamma = 6$$

sein muss.

Die Gattung (20) ist im *weiteren* Sinne reduzibel, sobald statt der Werte (21) die Werte

(22) $$\alpha = -1 \ , \quad p = +1 \ , \quad \gamma = +2$$

oder

(23) $$\alpha = -2 , \quad p = +1 , \quad \gamma = +3$$

auftreten.

Weil die Integration von $D = 0$ im allgemeinen nicht durchgeführt ist, kennen wir ϑ nicht und können deshalb ausser dem mit $P = 0$ gemeinsamen Integral

$$y = \prod^{i} (x - e_i)^{-p_i}$$

kein anderes angeben. Diese Möglichkeit liegt nur vor, wenn $D = 0$ selbst reduzibel ist; solche Fälle behandeln wir in § 2*c*.

§ 2b.

Reduktion auf eine Differentialgleichung 2. Ordnung.

Jetzt betrachten wir die Zerlegung

(1) $$C = P\,D\ ,$$

ausgeführt mit den Differentialausdrücken des vorigen Abschnitts.

Aus

$$P\,D = \frac{d^2 y}{d x^2} + \sum_{i=1}^{3} \frac{1 + \alpha_i + p_i}{x - e_i} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$+ \left\{ \sum^{i} \frac{p_i}{x - e_i} \cdot \sum^{i} \frac{1 + \alpha_i}{x - e_i} - \sum^{i} \frac{1 + \alpha_i}{(x - e_i)^2} + \frac{1}{f(x)} \left[\sum^{i} \frac{\beta_i f'(e_i)}{x - e_i} + \gamma x + \delta \right] \right\} \frac{dy}{dx}$$

$$+ \frac{1}{f(x)} \left\{ \left[\sum^{i} \frac{p_i}{x - e_i} - \frac{f'(x)}{f(x)} \right] \left[\sum^{i} \frac{\beta_i f'(e_i)}{x - e_i} + \gamma x + \delta \right] - \left[\sum^{i} \frac{\beta_i f'(e_i)}{(x - e_i)^2} - \gamma \right] \right\} y$$

erhalten wir die Bedingungen

(2) $$1 + \alpha_i + p_i = 3 + a_i \quad ; \qquad (i = 1, 2, 3)$$

durch Addition folgt wegen

(3) $$\sum^{i} a_i = -3\ , \quad \sum^{i} \alpha_i = -(\alpha_\infty + 2) = -\alpha$$

die Relation

(4) $$p = \alpha + 3\ .$$

Der Koeffizient von $\frac{dy}{dx}$ nimmt nach mehreren Umrechnungen folgende Gestalt an

$$(5)\qquad \frac{1}{f(x)}\left\{\sum^{i}\frac{[\beta_i+(p_i-1)(1+\alpha_i)]f'(e_i)}{(x-e_i)}+x\cdot[6+\gamma+\alpha(1-\alpha)]\right.$$
$$\left.+\delta+\sum^{i}e_i\left[p_i(3-\alpha)+\alpha_i(\alpha+1)+\alpha^2-5\right]\right\},$$

sodass sich durch Vergleich die Bedingungen ergeben

$$(6)\qquad \beta_i+(p_i-1)(\alpha_i+1)=a_i+b_i+1\quad;\qquad (i=1,2,3)$$

$$(7)\qquad \alpha(\alpha-1)=\gamma\quad;$$

$$(8)\qquad \delta+\sum^{i}e_i\left[p_i(3-\alpha)+\alpha_i(1+\alpha)+\alpha^2-2a_i-5\right]=0.$$

y hat den Faktor

$$(9)\qquad \frac{1}{f(x)^2}\left\{\sum^{i}\frac{\beta_i(p_i-2)f'(e_i)^2}{x-e_i}+x^3\cdot(\alpha-1)\alpha(\alpha+1)+k_1x^2+k_2x+k_3\right\},$$

wo:

$$k_1=\alpha\delta-\gamma\left[\sum^{i}p_i(e_k+e_l)-\sum^{i}e_i\right];$$

$$(9')\qquad k_2=(\alpha-1)\sum^{i}\beta_i f'(e_i)+\sum^{i}p_i\left[\gamma e_k e_l-\delta(e_k+e_l)\right]+2\delta\sum^{i}e_i;$$

$$k_3=\sum^{i}\beta_i f'(e_i)\left[e_i(p_i-2)+e_k(p_k-\alpha)+e_l(p_l-\alpha)\right]$$
$$+\delta\sum^{i}(p_i-1)e_k e_l-\gamma_1 e_1 e_2 e_3\;;$$

wir haben also zu fordern:

(10) $$\beta_i (p_i - 2) = c_i \quad ; \qquad (i = 1, 2, 3)$$

(11) $$(\alpha - 1)\,\alpha\,(\alpha + 1) = 0 \quad ;$$

(12) $$k_1 = k_2 = 0 \ ;$$

(13) $$k_3 = t \ .$$

Diese Bedingungen werden wir nun einer Diskussion unterziehen.

Aus den Gleichungen (6) und (10) ergeben sich die Relationen

(14) $$(p_i - 2)^3 - a_i (p_i - 2)^2 + b_i (p_i - 2) - c_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

aus denen wir durch Vergleich mit den determinierenden Fundamentalgleichungen die Wurzeln erhalten:

(15) $$p_{i1} = 2 - r_{i1} \ , \quad p_{i2} = 2 - r_{i2} \ , \quad p_{i3} = 2 - r_{i3} \ . \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Aus (4) und (15) ergäbe sich $\alpha = 4$, was der Gleichung (11) widerspräche; da hiernach nicht alle Wertetripel gelten können, setzen wir, ohne hierdurch eine Einschränkung zu vollziehen,

(16) $$p_i = 2 - r_{ii} \ . \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Dann folgt aus (4) wegen

$$p = 6 - \sum^{i} r_{ii}$$

die Forderung

(17) $$\sum^{i} r_{ii} = 3 - \alpha$$

und wegen (3)

(18) $$\sum^{i \leqq k} r_{ik} = \alpha.$$

Ferner wird

(19) $$\begin{gathered} \alpha_i = a_i + r_{ii} = -(r_{ik} + r_{il}) \ , \\ \beta_i = -\frac{c_i}{r_{ii}} = r_{ik}\, r_{il} \ ; \end{gathered} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

es sind also r_{ik} und r_{il} die Verzweigungsexponenten der im Endlichen gelegenen Punkte e_i; für den unendlich fernen Punkt berechnen sich dieselben aus:

$$\alpha_\infty = -(\lambda_\infty + \mu_\infty) = \alpha - 2\ ; \quad \beta_\infty = \lambda_\infty \mu_\infty = \delta\ . \tag{19'}$$

Führen wir nach (16) statt der p_i die r_{ii} ein, so können wir für einen Teil der Gleichungen 3. Ordnung mit 3 singulären Stellen, welche mit einer Gleichung 2. Ordnung alle Integrale gemeinsam haben, folgende Normalform aufstellen, welche noch im *engeren* und im *weiteren* Sinne reduzible Gleichungen umfasst:

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \sum^{i} \frac{3 + \alpha_i - r_{ii}}{x - e_i} \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$+ \frac{1}{f(x)} \left\{ 6x + 2\sum^{i} (\alpha_i - r_{ii})\, e_i + \sum^{i} \frac{[(1+\alpha_i)(1+r_{ii}) + \beta_i] f'(e_i)}{x - e_i} \right\} \frac{dy}{dx} \tag{20}$$

$$+ \frac{1}{f(x)^2} \cdot \left\{ t - \sum^{i} \frac{\beta_i r_{ii} f'(e_i)^2}{x - e_i} \right\} y = 0.$$

Hierzu kommen einige Bedingungen, die wir jedoch in den aus (11) sich ergebenden Fällen

$$\mathfrak{A})\ \ \alpha = -1\ ,\ \ \mathfrak{B})\ \alpha = 0\ ,\ \ \mathfrak{C})\ \alpha = +1$$

getrennt anführen wollen.

$\mathfrak{A})$

$\alpha = -1$ ergibt $\gamma = 2$, $p = 2$ und damit

$$\sum^{i} r_{ii} = 4, \tag{17a}$$

während

$$\sum^{i \leq k} r_{ik} = -1 \tag{18a}$$

wird. Ausser (3) bleiben noch die Bedingungen (8), (12), (13) bestehen in folgender Gestalt:

(8a) $$\delta = 2 \sum^{i} e_i (\alpha_i + r_{ii} - 2)$$

(12a) $$\delta = 2 \sum^{i} e_i (1 - r_{ii}).$$

Durch Elimination von δ ergibt sich hieraus die Bedingung:

(12′) $$\sum^{i} e_i (\alpha_i + 2 r_{ii} - 3) = 0.$$

Weiter muss sein

(21) $$\delta^2 = 2 \left\{ \sum^{i} \beta_i f'(e_i) - \sum^{i} (2 - r_{ii}) e_k e_l \right\}$$

und

(13a) $$t = \delta \sum^{i} (1 - r_{ii}) e_k e_l - 2 e_1 e_2 e_3$$

$$- \sum^{i} \beta_i f'(e_i) \left[e_i r_{ii} + e_k (r_{kk} - 3) + e_l (r_{ll} - 3) \right];$$

diese Bedingungen beschränken die Anzahl willkürlicher Konstanten in (20) auf fünf.

B)

$\alpha = 0$ gibt $\gamma = 0$, $p = 3$ und

(17b) $$\sum^{i} r_{ii} = 3;$$

ferner ist

(18b) $$\sum^{i \leqq k} r_{ik} = 0.$$

Da $k_1 = 0$ ist, so bleiben noch die Forderungen

(8 b) $$\delta = \sum^{i} e_i \, [\alpha_i + r_{ii} - 1] \, ;$$

(12 b) $$\delta \sum^{i} e_i \, (1 - r_{ii}) = \sum^{i} \beta_i \, f' \, (e_i) \, ;$$

(13 b) $$t = \delta \sum^{i} (1 - r_{ii}) \; e_k \, e_l - \sum^{i} \beta_i \, f' \, (e_i) \, [e_i \, r_{ii} + e_k \, (r_{kk} - 2) + e_l \, (r_{ll} - 2)].$$

(C)

Während (A) *und* (B) die Fälle angeben, in denen die Gleichung (20) im *weiteren* Sinne reduzibel ist, liefert uns $\alpha = +1$ alle im *engeren* Sinne reduziblen Gleichungen (20); denn es wird:

$$\gamma = 0 \; , \; \delta = 0$$

und somit

$$a_\infty = -1 \, , \; \beta_\infty = 0 \, .$$

Weil für $x = \infty$ nur ganzzahlige Exponenten in Betracht kommen können, ist dieser Punkt in (A) und (B) ausserwesentlich singulär; mit den Exponenten 0, 1 ist hier $x = \infty$ regulär: die Gleichung $D = 0$ ist also eine *Riemannsche Differentialgleichung.*

Zu

$$\alpha = +1$$

treten, weil die andern Forderungen identisch erfüllt sind, nur noch die beiden Bedingungen

(R) $$\sum^{i} r_{ii} = 2$$

und

(T) $$t = -\sum^{i} \beta_i \, f' \, (e_i) \, [r_{ii} \, e_i + (r_{kk} - 1) \, e_k + (r_{ll} - 1) \, e_l] \, .$$

Es verbleibt nun noch die Aufgabe, die Integrale von $C = 0$ durch diejenigen der Riemannschen Gleichung auszudrücken, wodurch sie schliesslich durch hypergeometrische Reihen dargestellt werden können.

Aus der Zerlegung (1) finden wir, dass die Gleichung $C = 0$ mit den unendlich vielen inhomogenen Gleichungen

$$D(y) = K \cdot \prod^{i} (x - e_i)^{-p_i}, \tag{22}$$

wo die Konstante K beliebig ist, das allgemeine Integral gemeinsam hat.

Die Lösungen der homogenen Differentialgleichung

$$D(\eta) = 0 \quad , \tag{23}$$

wo $x = \infty$ regulär sein soll, sind die Riemannschen Funktionen

$$\eta_h = P_h \begin{Bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ r_{12} & r_{23} & r_{31} \; x \\ r_{13} & r_{21} & r_{32} \end{Bmatrix} . \qquad (h = 1, 2) \tag{24}$$

Nach der Lagrangeschen Methode der Variation der Konstanten setzen wir als allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (22) an

$$y = u_1 \, \eta_1 + u_2 \, \eta_2 \quad , \tag{25}$$

wo die u_i zu bestimmende Funktionen von x sind.

Es folgt durch Differentiation

$$y' = u_1 \, \eta'_1 + u_2 \, \eta'_2 \quad , \tag{25'}$$

wenn wir verlangen

$$u'_1 \, \eta_1 + u'_2 \, \eta_2 = 0 \quad ; \tag{26}$$

ebenso wird

$$y'' = u_1 \, \eta''_1 + u_2 \, \eta''_2 \tag{25''}$$

für

$$u'_1 \, \eta'_1 + u'_2 \, \eta'_2 = K \cdot \prod^{i} (x - e_i)^{-p_i} . \tag{27}$$

Aus (26) und (27) ergibt sich, weil die Determinante des Fundamentalsystems der Riemannschen Gleichung

$$\Delta = \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \eta'_1 & \eta'_2 \end{vmatrix} \tag{28}$$

von Null verschieden ist,

$$u'_1 = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} 0 & \eta_2 \\ K\overset{i}{\Pi} & \eta'_2 \end{vmatrix} = -K\frac{\eta_2}{\Delta} \cdot \overset{i}{\prod} (x - e_i)^{-p_i}$$

$$u'_2 = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} \eta_1 & 0 \\ \eta'_1 & K\overset{i}{\Pi} \end{vmatrix} = +K\frac{\eta_1}{\Delta} \cdot \overset{i}{\prod} (x - e_i)^{-p_i}$$

also

$$\begin{aligned} u_1 &= k_1 - K\int \frac{\eta_2}{\Delta} \overset{i}{\prod} (x - e_i)^{-p_i}\, dx \\ u_2 &= k_2 + K\int \frac{\eta_1}{\Delta} \overset{i}{\prod} (x - e_i)^{-p_i}\, dx, \end{aligned} \tag{29}$$

wo k_1 und k_2 Integrationskonstanten sind; das allgemeine Integral von (22) lautet daher

$$\begin{aligned} y = &\left\{ k_1 - K\int \frac{\eta_2}{\Delta} \overset{i}{\prod} (x - e_i)^{-p_i}\, dx \right\} \eta_1 \\ &+ \left\{ k_2 + K\int \frac{\eta_1}{\Delta} \overset{i}{\prod} (x - e_i)^{-p_i}\, dx \right\} \eta_2. \end{aligned} \tag{30}$$

Für $K = k_3$ stellt es in der Gestalt

$$\begin{aligned} y = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 - k_3 \Bigg\{ &\eta_1 \int \frac{\eta_2}{\Delta} \overset{i}{\prod} (x - e_i)^{-p_i}\, dx \\ &- \eta_2 \int \frac{\eta_1}{\Delta} \overset{i}{\prod} (x - e_i)^{-p_i}\, dx \Bigg\} \end{aligned} \tag{30'}$$

das allgemeine Integral von $C(y) = 0$ dar.

Dass nun

$$y_1 = \eta_{i1} \ ,$$

(31)
$$y_2 = \eta_{i2} \ ,$$

$$y_3 = \eta_{i1} \int \frac{\eta_{i2}}{\Delta} \cdot \prod^{i} (x - e_i)^{-p_i} \, dx - \eta_{i2} \int \frac{\eta_{i1}}{\Delta} \cdot \prod^{i} (x - e_i)^{-p_i} \, dx$$

für $C(y) = 0$ ein Fundamentalsystem bilden, geht daraus hervor, dass die Determinante

(32)
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \\ y''_1 & y''_2 & y''_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 & y_3 \\ \eta'_1 & \eta'_2 & y'_3 \\ \eta''_1 & \eta''_2 & y''_3 \end{vmatrix}$$

den Wert

(32′)
$$\Delta_1 = \Delta \cdot \prod^{i} (x - e_i)^{-p_i}$$

besitzt, also nicht identisch verschwindet.

Diesen Wert erhalten wir auch auf folgendem Wege: Nach einem bekannten Satze ist die logarithmische Derivierte der Determinante des Fundamentalsystems gleich dem negativen Koeffizienten der zweithöchsten Ableitung, wenn der Koeffizient der höchsten Derivierten Eins ist. Hieraus folgt

$$\Delta = konst. \ e^{-\int \sum^{i} \frac{1 + \alpha_i}{x - e_i} dx} = konst. \prod^{i} (x - e_i)^{-(1 + \alpha_i)}$$

$$\Delta_1 = konst. \ e^{-\int \sum^{i} \frac{1 + \alpha_i + p_i}{x - e_i} dx} = konst. \prod^{i} (x - e_i)^{-(1 + \alpha_i + p_i)}$$

wonach (32′) bestätigt ist.

Mit Benutzung von

$$\Delta \cdot \prod^{i} (x - e_i)^{p_i} = \prod^{i} (x - e_i)^{-(1 + \alpha_i - p_i)}$$

schreibt sich das Fundamentalsystem:

$$y_1 = \eta_{l1} \ ,$$

(31′)
$$y_2 = \eta_{l2} \ ,$$

$$y_3 = \eta_{l1} \int \eta_{l2} \prod^{i} (x - e_i)^{1 + \alpha_i - p_i} dx - \eta_{l2} \int \eta_{l1} \prod^{i} (x - e_i)^{1 + \alpha_i - p_i} dx.$$

Würden wir hierin noch die η durch die F-Reihen ausdrücken, so würden wir für y_1 und y_2 in der Umgebung der Punkte e_i Darstellungen erhalten wie z. B.

$$y_1 = (-1)^{r_{2k}} \left(\frac{x - e_1 \cdot e_2 - e_3}{x - e_3 \cdot e_2 - e_1}\right)^{r_{1k}} \cdot \left(\frac{x - e_2 \cdot e_1 - e_3}{x - e_3 \cdot e_1 - e_2}\right)^{r_{2k}} \cdot$$

$$\cdot F\left(\sum^{i} r_{ik}, \sum^{i} r_{ik} + (r_{3l} - r_{3k}), 1 + r_{1k} - r_{1l}, \frac{x - e_1 \cdot e_2 - e_3}{x - e_3 \cdot e_2 - e_1}\right)$$

Das 3. Integral würde jeweils, jedoch in komplizierter Form, das Fundamentalsystem vervollständigen. y_3 kann nicht verschwinden, da y_1 und y_2 stets ein Fundamentalsystem der Riemannschen Gleichung bilden. Im Falle $\eta_{l1} = \eta_{l2}$ treten in y_2 und y_3 Logarithmen auf.

§ 2c.

Zerlegung des Differentialausdrucks dritter Ordnung in drei Differentialfaktoren erster Ordnung.

Wir betrachten nun noch den Spezialfall, in welchem die Zerlegung

(1)
$$C = N M L$$

möglich ist, wo

$$L(y) = \frac{dy}{dx} + \sum_{i=1}^{3} \frac{l_i}{x - e_i} \cdot y\,, \qquad \sum^{i} l_i = l$$

(2) $$M(y) = \frac{dy}{dx} + \sum_{i=1}^{3} \frac{m_i}{x - e_i} \cdot y\,, \qquad \sum^{i} m_i = m$$

$$N(y) = \frac{dy}{dx} + \sum_{i=1}^{3} \frac{n_i}{x - e_i} \cdot y\,, \qquad \sum^{i} n_i = n$$

Fuchssche Differentialausdrücke 1. Ordnung sind.

Berechnen wir:

(3) $$ML = \frac{d^2 y}{d x^2} + \sum^{i} \frac{m_i + l_i}{x - e_i} \cdot \frac{dy}{dx} + \left\{ \sum^{i} \frac{m_i}{x - e_i} \cdot \sum^{i} \frac{l_i}{x - e_i} - \sum^{1} \frac{l_i}{(x - e_i)^2} \right\} y$$

und wenden hierauf die Differentialoperation $N(y)$ an, so folgt:

$$NML = \frac{d^3 y}{d x^3} + \sum^{i} \frac{l_i + m_i + n_i}{x - e_i} \cdot \frac{d^2 y}{d x^2}$$

(4) $$+ \left\{ \sum^{i} \frac{n_i}{x - e_i} \sum^{i} \frac{l_i + m_i}{x - e_i} + \sum^{i} \frac{m_i}{x - e_i} \sum^{i} \frac{l_i}{x - e_i} - \sum^{i} \frac{m_i + 2\,l_i}{(x - e_i)^2} \right\} \frac{dy}{dx}$$

$$+ \left\{ \sum^{i} \frac{l_i}{x - e_i} \sum^{i} \frac{m_i}{x - e_i} \sum^{i} \frac{n_i}{x - e_i} - \sum^{i} \frac{l_i}{(x - e_i)^2} \sum^{i} \frac{m_i + n_i}{x - e_i} \right.$$

$$\left. - \sum^{i} \frac{l_i}{x - e_i} \sum^{i} \frac{m_i}{(x - e_i)^2} + 2 \sum^{i} \frac{l_i}{(x - e_i)^3} \right\} y\,.$$

Durch Vergleich mit $C(y)$ erhalten wir die Bedingungen

(5) $$l_i + m_i + n_i = 3 + a_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Die Fuchssche Relation $\sum^{i} a_i = -3$ ergibt hiernach

$$l + m + n = 6. \tag{6}$$

Schreiben wir den Koeffizienten von $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{1}{f(x)}\left\{\sum^{i} n_i (x-e_k)(x-e_l) \sum^{i} \frac{m_i + l_i}{x - e_i}\right. \tag{7}$$
$$\left. + \sum^{i} m_i (x-e_k)(x-e_l) \sum^{i} \frac{l_i}{x-e_i} - \sum^{i} \frac{(2\,l_i + m_i)(x-e_k)(x-e_l)}{x-e_i}\right\},$$

so erhalten wir nach verschiedenen Umformungen

$$\frac{1}{f(x)}\Big\{ x(l\,m + m\,n + n\,l - 2\,l - m)$$
$$+ \sum^{i} e_i \Big[6(3+a_i) - (l\,m + m\,n + n\,l - 2\,l - m) - [l_i(l+4) + m_i(m+2) + n_i n]\Big] \tag{7'}$$
$$+ \sum^{i} \frac{(l_i\,m_i + m_i\,n_i + n_i\,l_i - 2\,l_i - m_i) f'(e_i)}{x - e_i}\Big\}$$

und hieraus folgen die weiteren Bedingungen

$$l\,m + m\,n + n\,l - 2\,l - m = 6 \tag{8}$$

oder

$$l(4-l) + m(n-1) = 6\ ; \tag{8'}$$

$$\sum^{i} e_i [l_i (l+4) + m_i (m+2) + n_i\, n - 4(3 + a_i)] = 0\ ; \tag{9}$$

$$l_i (m_i + n_i - 2) + m_i (n_i - 1) = a_i + b_i + 1\ . \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{10}$$

y hat den Faktor:

$$\frac{1}{f(x)^2}\left\{\sum^{i} l_i (x-e_k)(x-e_l)\sum^{i} m_i (x-e_k)(x-e_l)\sum^{i}\frac{n_i}{x-e_i}\right.$$

$$\left.-\sum^{i}\frac{l_i(x-e_k)(x-e_l)}{x-e_i}\sum^{i}(2m_i+n_i)(x-e_k)(x-e_l)+2\sum^{i}\frac{l_i(x-e_k)^2(x-e_l)^2}{x-e_i}\right\};$$

durch Umrechnung ergibt sich hierfür die Gestalt

$$(11)\quad \frac{1}{f(x)^2}\left\{\sum^{i}\frac{l_i(m_i-1)(n_i-2)f'(e_i)^2}{x-e_i}+x^3\cdot l(m-1)(n-2)+k_1x^2+k_2x+k_3\right\},$$

wo sich die Grössen:

$$k_1=\sum^{i}\Big[(e_i-2e_k-2e_l)\ l_i(m_i-1)(n_i-2)$$

$$+(2e_k+e_l)[l_i(m_l+n_l)-l_l m_i(n_i-1)]+(e_k+2e_l)[l_i(m_k+n_k)-l_k m_i(n_i-1)]$$

$$-n_i\left\{l[m_k e_l+m_l e_k]+(m_k+m_l)[l_i(e_k+e_l)+e_i(l_k+l_l)+l_k e_l+l_l e_k]\right\}\Big],$$

$$k_2=\sum^{i}\Big[\left\{(e_i-e_k-e_l)^2+2e_k e_l\right\}l_i(m_i-1)(n_i-2)-e_k(e_k+2e_l)\cdot$$

$$\cdot[l_i(m_l+n_l)-l_l m_i(n_i-1)]-e_l(2e_k+e_l)[l_i(m_k+n_k)-l_k m_i(n_i-1)]$$

$$+n_i\left\{[m_k+m_l][l_i e_k e_l+e_i(l_k e_l+l_l e_k)]\right.$$

$$\left.+[m_k e_l+m_l e_k][e_i(l_k+l_l)+l_i(e_k+e_l)+l_k e_l+l_l e_k]\right\}\Big],$$

$$k_3=\sum^{i}\Big[\left\{e_i(e_i-e_k-e_l)+2e_k e_l\right\}(e_i-e_k-e_l)\,l_i(m_i-1)(n_i-2)$$

$$+e_k e_l\left\{e_k[l_i(m+n_l)-l_l m_i(n_i-1)]+e_l[l_i(m_k+n_k)-l_k m_i(n_i-1)]\right\}$$

$$-n_i(m_k e_l+m_l e_k)(l_i e_k e_l+l_k e_l e_i+l_l e_i e_k)\Big]$$

nicht mehr wesentlich vereinfachen lassen.

Die letzten Bedingungen lauten also:

$$l_i\,(m_i-1)\,(n_i-2)=c_i\quad;\qquad (i=1,2,3) \tag{12}$$

$$l\,(m-1)\,(n-2)=0\quad; \tag{13}$$

$$k_1=k_2=0\;; \tag{14}$$

$$k_3=t\,. \tag{15}$$

Aus den Gleichungen (6), (8′) und (13) erhalten wir folgende Tabelle der sechs möglichen Tripel l, m, n

(16)

$l=$	2	1	2	0	1	0
$m=$	2	3	1	3	1	2
$n=$	2	2	3	3	4	4

Unter den *Differentialgleichungen 3. Ordnung mit drei im Endlichen liegenden singulären Stellen* haben wir also folgende Gattung, die sich auf eine Gleichung 1. Ordnung zurückführen lässt:

$$\begin{aligned}\frac{d^3y}{dx^3}+\sum_{i=1}^{3}\frac{l_i+m_i+n_i}{x-e_i}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{f(x)}\Big\{6x+2\sum^{i}e_i\,(l_i+m_i+n_i-3)\\ +\sum_{i=1}^{3}\frac{[l_i\,(m_i+n_i-2)+m_i\,(n_i-1)]\,f'(e_i)}{x-e_i}\Big\}\frac{dy}{dx}\\ +\frac{1}{f(x)^2}\Big\{t+\sum_{i=1}^{3}\frac{l_i\,(m_i-1)\,(n_i-2)\,f'(e_i)^2}{x-e_i}\Big\}y=0\;,\end{aligned} \tag{17}$$

wo die Bedingungen (9), (14), (15) zu erfüllen und l, m, n der Tabelle (16) zu entnehmen sind.

Nur diejenigen Tripel, welche $l=0$ enthalten, ergeben Reduzibilität im ... Sinne; alle andern führen auf Gleichungen $L=0$, für welche $x=\infty$ ... wesentlich singuläre Stelle ist.

Durch dreimalige Integration in

$$N\,M\,L=0$$

findet man das allgemeine Integral

$$y = \prod^{i} (x - e_i)^{-l_i} \cdot$$

(18)

$$\cdot \left\{ \int \prod^{i} (x - e_i)^{l_i - m_i} \left[C_1 \int \prod^{i} (x - e_i)^{m_i - n_i} \, dx + C_2 \right] dx + C_3 \right\}$$

und damit das Fundamentalsystem:

$$y_1 = \prod^{i} (x - e_i)^{-l_i} \, ,$$

(19)

$$y_2 = \prod^{i} (x - e_i)^{-l_i} \int \prod^{i} (x - e_i)^{l_i - m_i} \, dx,$$

$$y_3 = \prod^{i} (x - e_i)^{-l_i} \int \prod^{i} (x - e_i)^{l_i - m_i} \left[\int \prod^{i} (x - e_i)^{m_i - n_i} \, dx \right] dx \cdot$$

Wie in § 2 des zweiten Abschnitts lässt sich auch hier erkennen, wann ausser y_1 noch y_2 bezw. y_3 Gleichungen 1. Ordnung genügen.

§ 3.

Allgemeine Sätze über die Reduzibilität von Differentialgleichungen dritter Ordnung.

Bevor wir an die Aufstellung des allgemeinen Verfahrens herangehen, durch welches festgestellt wird, ob und in welcher Weise eine vorgelegte Fuchssche Differentialgleichung 3. Ordnung reduzibel ist, stellen wir einige Sätze über lineare homogene Differentialgleichungen zusammen, die sich aus solchen von Herrn Loewy (a. a. O.) ergeben.

Aus der Definition des Artbegriffs folgt, dass nur Gleichungen gleicher Ordnung gegenseitig von derselben Art sein können.

Es gilt nun der Satz:

I. *Eine Differentialgleichung 3. Ordnung kann nicht mit zwei irreduziblen Gleichungen 2. Ordnung Integrale gemeinsam haben.*

Denn das kleinste gemeinsame Vielfache der beiden irreduziblen Gleichungen 2. Ordnung wäre bereits von der 4. Ordnung.

Ebenso:

II. *Eine Differentialgleichung 3. Ordnung, welcher die Integrale einer irreduziblen Gleichung 2. Ordnung genügen, wird höchstens noch durch das Integral einer einzigen Differentialgleichung 1. Ordnung befriedigt.*

Gäbe es noch eine zweite Differentialgleichung 1. Ordnung, deren Integral die Gleichung 3. Ordnung befriedigen würde, so müsste es deren unendlich viele geben, weil die Summe der Ordnungen grösser als drei wäre; dann müsste aber die Gleichung 2. Ordnung mit jeder dieser Gleichungen 1. Ordnung gegenseitig von derselben Art sein, was unmöglich ist.

Aus II folgt sofort:

III. *Eine Differentialgleichung 3. Ordnung, die mit zwei oder mehr Differentialgleichungen 1. Ordnung Integrale gemeinsam hat, kann mit keiner irreduziblen Gleichung 2. Ordnung Integrale gemeinsam haben.*

Unmittelbar ergibt sich:

IV. *Soll eine Differentialgleichung 3. Ordnung mit unendlich vielen Gleichungen 1. Ordnung Integrale gemeinsam haben, so müssen entweder zwei solcher Gleichungen existieren, welche ähnlich sind, oder vier solcher Gleichungen (dieselben sind dann ähnlich).*

Hiernach haben wir also für eine vorgelegte Differentialgleichung 3. Ordnung zu unterscheiden, ob entweder

1) *keine* ganzzahlige Summe von drei bezw. sechs Exponenten existiert; dann ist sie irreduzibel;

oder, wenn solche ganzzahligen Summen vorhanden sind, ob die Gleichung 3. Ordnung

2) durch das Integral einer Gleichung 1. Ordnung befriedigt wird,

3) *nur* auf eine *irreduzible* Gleichung 2. Ordnung zurückgeführt werden kann.

Im 2. Falle ist weiter zu untersuchen, ob der Gleichung 3. Ordnung

α) *nur* das Integral *einer* Gleichung 1. Ordnung genügt oder ob sie *ausserdem* befriedigt wird durch die Integrale von

β) einer Gleichung
γ) zwei Gleichungen
} 1. Ordnung, welche unter sich und mit der ersten ersten Gleichung *nicht ähnlich* sind,

δ_1) einer Gleichung 1. Ordnung, welche mit jener ersten *ähnlich* ist, oder, was gleichbedeutend ist,

δ_2) drei Gleichungen 1. Ordnung, oder endlich

ε) einer Differentialgleichung 2. Ordnung, welche *irreduzibel* ist.

Nur im Falle 2δ existieren unendlich viele Differentialgleichungen 1. Ordnung, deren Integrale die gegebene Gleichung befriedigen.

In den Fällen 1, 2γ, 2δ, 2ε ist die Gleichung 3. Ordnung selbst vollständig reduzibel; im Falle 2α ist die Gleichung 1. Ordnung, im Falle 3 diejenige 2. Ordnung die grösste vollständig reduzible Gleichung; im Falle 2β besitzt diese Eigenschaft diejenige Gleichung 2. Ordnung, welche das kleinste gemeinsame Vielfache der Gleichungsn 1. Ordnung ist.

Soll nun eine Differentialgleichung 3. Ordnung mit 3 singulären Stellen mit einer Gleichung 1. Ordnung deren Integral gemeinsam haben, so muss nach dem im 1. Abschnitt abgeleiteten Satze wenigstens eine Summe von drei Exponenten, von denen je einer zu den verschiedenen singulären Punkten gehört, gleich einer negativen ganzen Zahl sein.

Sind mehrere solcher Summen vorhanden, ist G der grösste, K der kleinste der Absolutwerte und gibt $\varkappa$ die Anzahl ausserwesentlich singulärer Stellen der Gleichung 1. Ordnung an, so bestehen die Grenzen:

$$G \geqq \varkappa \geqq \frac{K}{2} .$$

Soll eine Differentialgleichuug 3. Ordnung mit 3 singulären Stellen durch die Integrale einer Gleichung 2. Ordnung befriedigt werden, so ist dazu notwendig, dass eine Summe von sechs Exponenten (zu je 2) eine ganze Zahl ist.

Es möge die Gleichung 2. Ordnung $(3 + \varkappa)$ singuläre Stellen haben (evtl. incl. $x = \infty$) und es sei u_i bezw. u'_j die negative Summe der Verzweigungsexponenten der Stelle e_i bezw. ε_j, dann ist

$$\sum_{i=1}^{3} u_i + \sum_{j=1}^{\varkappa} u'_j = -(\varkappa + 1).$$

Da die u'_j der ausserwesentlich singulären Stellen nur die Werte haben können

$$-(0+2) = -2 \quad , \quad -(1+2) = -3 \ ,$$

so folgt:

$$1 + \sum^{i} u_i \geqq \varkappa \geqq \frac{1 - \sum^{i} u_i}{2} \ .$$

Die Zerlegung der Differentialausdrücke wird wie im zweiten Abschnitt angesetzt.

Anhang.

Beispiele von reduziblen Fuchsschen Differentialgleichungen mit einem Parameter.

Zum Schlusse stellen wir einige Beispiele zusammen, welche die wichtigsten Möglichkeiten veranschaulichen.

I. Die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{6}\left\{\frac{6}{x+i} - \frac{6}{x+1} + \frac{5}{x-1} + \frac{7}{x-i}\right\}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$- \frac{2}{9(x^2-1)(x^2+1)}\left\{\frac{2i}{x+i} + \frac{16}{x+1} - \frac{3i}{x-i} - \frac{55}{2}\right\}\cdot y = 0$$

hat mit der Gleichung 1. Ordnung

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{6}\left\{\frac{2}{x+i} - \frac{4}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x-i}\right\} y = 0$$

das Integral

$$y_1 = (x+i)^{-1/3}(x+1)^{2/3}(x-1)^{1/6}(x-i)^{-1/2}$$

gemeinsam, mit welchem

$$y_2 = y_1 \int (x+i)^{-1/3}(x+1)^{-1/3}(x-1)^{-7/6}(x-i)^{-1/6}\,dx$$

ein Fundamentalsystem bildet.

Die Gleichung 1. Ordnung ist die einzige reduzierte (und als solche die grösste vollständig reduzible) Gleichung der Ausgangsgleichung, wie sich aus der Tabelle der Verzweigungsexponenten

$$\begin{array}{cccc} -\frac{1}{3} & +\frac{2}{3} & +\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{3} & +\frac{4}{3} & 0 & +\frac{1}{3} \end{array}$$

ergibt, welche keine ganze negative Summe von vier Exponenten (aus jeder Spalte ein Exponent) enthält.

II. Die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{30}\left\{\frac{5}{x-1} + \frac{14}{x} + \frac{31}{x+1} + \frac{70}{7x-2}\right\}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x(x+1)(x-1)(7x-2)} \cdot \left\{\frac{5}{3(x-1)} + \frac{2}{15x} + \frac{2}{5(x+1)} + \frac{80}{7(7x-2)} + \frac{127}{45}\right\} y = 0$$

hat als 1. Integral

$$y_1 = (x-1)^{1/2}\, x^{1/3}\, (x+1)^{-1/6}\, (x-\tfrac{2}{7})^{-2/3}.$$

Das hiervon linear unabhängige Integral

$$y_2 = (x-1)^{1/2}\, x^{1/3}\, (x+1)^{-1/6}\, (x-\tfrac{2}{7})^{-2/3} \int (x-1)^{-7/6}\, x^{-17/15}\, (x+1)^{-7/10}\, (x-\tfrac{2}{7})\, dx$$

nimmt, wie man leicht nachrechnet, die Gestalt an

$$y_2 = (x-1)^{1/3}\, x^{1/5}\, (x+1)^{2/15}\, (x-\tfrac{2}{7})^{-2/3}.$$

Da

$$\frac{y_1}{y_2} = (x-1)^{1/6}\, x^{2/15}\, (x+1)^{-3/10}$$

keine rationale Funktion ist, hat die gegebene Gleichung nur mit zwei einander nicht ähnlichen Gleichungen 1. Ordnung Integrale gemeinsam.

III. Die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{3}\left\{\frac{1}{x+i} - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-i} + \frac{3}{x-1}\right\}\frac{dy}{dx}$$
$$- \frac{8}{9(x^2-1)(x^2+1)}\left\{\frac{i}{x+i} + \frac{5}{x+1} - \frac{i}{x-i} + \frac{4i-9}{4}\right\}y = 0.$$

hat mit unendlich vielen Differentialgleichungen 1. Ordnung Integrale gemeinsam.

Sie besitzt nämlich die linear unabhängigen Integrale

$$y_1 = (x+i)^{-1/3}(x+1)^{2/3}(x-i)^{-1/3}$$

$$y_2 = (x+i)^{-1/3}(x+1)^{2/3}(x-i)^{-1/3}(x-1)^{-1}$$

aus denen sich, weil

$$y_1 = (x-1)\,y_2$$

ist, wieder Integrale bilden lassen, welche Gleichungen 1. Ordnung genügen.

Die 3 angeführten Gleichungen 2. Ordnung sind im engeren Sinne reduzibel, die beiden letzten von ihnen sind vollständig reduzibel.

IV. Im weiteren Sinne reduzibel ist die Gleichung 2. Ordnung, deren vierter singulärer Punkt im Unendlichen liegt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{84}\left\{\frac{47}{x+1} + \frac{19}{x-1} - \frac{159}{x}\right\}\frac{dy}{dx}$$
$$+ \frac{1}{84\,x(x-1)(x+1)}\left\{\frac{89}{x+1} + \frac{50}{x-1} + \frac{161}{x} - \frac{130}{3}x - \frac{1}{2}\left(131 + 74\,i\right)\right\}y = 0$$

Ihre einzige reduzierte Gleichung

$$\frac{dy}{dx} - \left\{\frac{1}{x-i} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{7}{6x}\right\}y = 0$$

hat das Integral

$$y = (x-i)(x+1)^{1/2}(x-1)^{1/3}x^{-7/6}.$$

Im engeren Sinne reduzibel sind folgende Differentialgleichungen 3. Ordnung:

V. Die Gleichung

$$D(y) \equiv \frac{d^3 y}{d x^3} + \left\{ \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x} \right\} \frac{d^2 y}{d x^2}$$

$$- \frac{2}{x(x^2-1)} \left\{ \frac{6}{25(x+1)} + \frac{18}{49(x-1)} - \frac{2}{9x} - 3x \right\} \frac{dy}{dx}$$

$$+ \frac{8}{x^2 (x^2-1)^2} \left\{ \frac{3}{25(x+1)} + \frac{9}{49(x-1)} + \frac{1}{9x} \right\} y = 0,$$

deren linke Seite sich nur auf eine Art in Faktoren zerlegen lässt

$$D = Q P ,$$

wo

$$Q(y) \equiv \frac{d^2 y}{d x^2} + 2 \left\{ \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} \right\} \frac{dy}{dx}$$

$$+ \frac{2}{x(x^2-1)} \left\{ 3x - \frac{6}{25(x+1)} + \frac{18}{49(x-1)} - \frac{2}{9x} \right\} y$$

ein irreduzibler Differentialausdruck,

$$P(y) \equiv \frac{dy}{dx} - \left\{ \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x} \right\} y = 0$$

die Gleichung ist, deren Integral

$$y = (x+1)(x-1)x^{-2}$$

die Ausgangsgleichung befriedigt.

In der Tabelle der Verzweigungsexponenten der Gleichung 3. Ordnung

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -2 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{7} & +\frac{4}{3} \\ -\frac{6}{5} & -\frac{9}{7} & -\frac{1}{3} \end{array}$$

geben die beiden letzten Reihen die Exponenten von $Q(y) = 0$ an, wo für den unendlich fernen singulären Punkt die Exponenten 2 und 3 auftreten. (Die Zahl 3 ist deshalb möglich, weil $D(y) = 0$ mit $Q(y) = 0$ kein Integral gemeinsam hat).

VI. Die Gleichung

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{1}{210}\left\{\frac{413}{x-i} + \frac{180}{x} + \frac{647}{x+i}\right\}\frac{d^2y}{dx^2}$$
$$+ \frac{1}{x(x^2+1)}\left\{6x - \frac{397}{210}i - \frac{3}{5(x-i)} - \frac{4}{9x} - \frac{241}{105(x+i)}\right\}\frac{dy}{dx}$$
$$+ \frac{1}{x^2(x^2+1)^2}\left\{\frac{4}{15}i - \frac{2}{15(x-i)} + \frac{32}{63x} - \frac{2}{105(x+i)}\right\}y = 0$$

reduziert sich auf die irreduzible Riemannsche Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{105}\left\{\frac{49}{x-i} + \frac{20}{x} + \frac{141}{x+i}\right\}\frac{dy}{dx}$$
$$- \frac{2}{105x(x^2+1)}\left\{\frac{7}{x-i} + \frac{20}{x} + \frac{3}{x+i}\right\}y = 0,$$

mit der sie die Integrale

$$y_1 = \left(\frac{x-i}{2x}\right)^{1/3} \cdot F\left(-\frac{1}{7}, -\frac{1}{5}, -\frac{10}{21}, \frac{2x}{x+i}\right)$$
$$y_2 = \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{1/3}\left(\frac{2x}{x+i}\right)^{8/7} \cdot F\left(\frac{134}{105}, \frac{4}{3}, \frac{52}{21}, \frac{2x}{x+i}\right)$$

gemeinsam hat.

Diese Riemannsche Gleichung ist die einzige reduzierte Gleichung.

VII. In drei Faktoren 1. Ordnung lässt sich die linke Seite der Gleichung

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \left\{\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x} + \frac{1}{x-1}\right\}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x(x+1)(x-1)}\left\{3x - 1 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x-1}\right\}\frac{dy}{dx}$$
$$+ \frac{2}{x^2(x^2-1)^2}\left\{\frac{4}{x-1} - \frac{3}{x} - 1\right\}y = 0$$

zerlegen. Aus den beiden Integralen, welche Gleichungen 1. Ordnung befriedigen

$$y_1 = \frac{x-1}{x}\,,\quad y_2 = \frac{x-1}{x^2}$$

lassen sich unendlich viel Integrale bilden, welche ebenfalls Gleichungen 1. Ordnung genügen z. B.

$$y = \frac{x^2-1}{x^2}\,.$$

Die Ausgangsgleichung ist aber trotzdem nicht vollständig reduzibel, sondern die Riemannsche Gleichung, welcher alle diese Integrale Genüge leisten.

Berichtigungen.

Seite 2 Zeile 3 von unten:

$$\text{statt } a_{in} = \frac{f_n(e_i)}{f'(e_i{}^n)} \text{ lies } a_{in} = \frac{f_n(e_i)}{f'(e_i)^n};$$

Seite 4 Zeile 1 von oben:

$$\text{statt } \sum_{j=1}^{n} r_{ij} \text{ lies } \sum_{j=1}^{n} r_{1j};$$

Seite 26 Formel (6) statt $F'(r')$ lies $F'_i(r')$;

Seite 32 Formel (8) füge in der Gleichung für $\frac{d^3 y}{d x^3}$ vor dem Klammerkoeffizienten

$$\text{von } \frac{dz}{dx} \text{ den Faktor 3 ein;}$$

Seite 63 Formel (2) statt $r'_{n_1}(x)$ lies $r_{n_1}(x)$;

Seite 69 in der 3. Zeile der Gleichung für $D P$

$$\text{statt } \sum^{i} \frac{p_i}{x - e_i} \cdot \sum^{i} \frac{1 + \alpha_i}{x - e_i} \text{ lies } \sum^{i} \frac{p_i}{(x - e_i)^2} \cdot \sum^{i} \frac{1 + \alpha_i}{x - e_i};$$

Seite 72 Zeile 1 von oben:

$$\text{statt } \sum_{i=1}^{3} \frac{1 + \alpha_i - p_i}{x - e_i} \text{ lies } \sum_{i=1}^{3} \frac{1 + \alpha_i + p_i}{x - e_i};$$

Seite 73 Zeile 7 von oben:

$$\text{statt } P D = \frac{d^2 y}{d x^2} + \cdots \text{ lies } P D = \frac{d^3 y}{d x^3} + \cdots$$

Seite 76 Formel (20), mittlere Zeile:

$$\text{statt } \sum^{i} \frac{[(1 + \alpha_i)(1 + r_{ii}) + \beta_i] f'(e_i)}{x - e_i} \text{ lies } \sum^{i} \frac{[(1 + \alpha_i)(1 - r_{ii}) + \beta_i] f'(e_i)}{x - e_i}.$$

Lebenslauf.

Ich, Heinrich Wacker, Sohn des Gerichtsvollziehers Heinrich Wacker und seiner Ehefrau Luise, geb. Bürckert, wurde am 26. Juni 1890 zu Strassburg i. E. geboren. Nach Absolvierung der „Realschule bei St. Johann“ besuchte ich zwei Jahre lang die „Oberrealschule beim Kaiserpalast“. Dann wurde ich wieder der erstgenannten Anstalt, welche zur Oberrealschule ausgebaut wurde, überwiesen und erwarb dort im Jahre 1908 das Reifezeugnis. Seit dieser Zeit studiere ich an der hiesigen Universität Mathematik und Physik; ich fühle mich besonders den Herren Professoren Braun, Cohn, Epstein, v. Mises, Schur, Weber, Wellstein zu Dank verpflichtet.

Zur Abfassung der vorliegenden Arbeit wurde ich durch Herrn Prof. Dr. Epstein angeregt, der mir während der Ausführung in äusserst zuvorkommender Weise seinen Rat zuteil werden liess. Ich möchte ihm dafür auch an dieser Stelle meinen wärmsten Dank aussprechen.